

Treball Final de Carrera

Parametrització de contorns oberts

Jaume Danés Garolera

**Enginyeria Tècnica industrial. Especialitat en electrònica
industrial**

Director: Pere Martí Puig

Vic, setembre de 2012

Agraïments

En primer lloc agrair al doctor Pere Martí per haver-me dirigit en aquest treball. Agrair també a les persones que han cedit les firmes per fer les proves corresponents.

D'altre banda agrair a la meva família per la seva paciència, a la Mia Morante per estar sempre al meu costat i finalment a tots aquells que m'han donat suport al llarg de la carrera.

Moltes gràcies.

Índex

Agraïments	i
Índex	ii
Resum	iv
Abstract	v
1. Introducció	1
2. Objectius i metodologia.....	6
2.1. Objectius	7
2.2. Metodologia.....	8
3. Precedents: descriptors de contorns tancats	10
3.1. Elliptic Fourier Descriptors (EFD)	11
3.1.1. Descriptors EFD i la seva relació amb DFT.....	12
3.2. Problemes dels EFD en els contorns oberts	16
4. Modificació dels EFD per tal de que descriguin contorns oberts	18
5. Estudi dels nous descriptors	22
5.1. Influència del nombre de coeficients en la reconstrucció.....	23
5.2. Propietats dels descriptors davant de rotacions, translacions i canvis d'escala ...	25
5.2.1. Estudi en vers les rotacions	25
5.2.2. Estudi en vers les translacions.....	27
5.2.3. Estudi dels descriptors davant dels canvis d'escala	29
5.3. Descriptors de baixa complexitat	31
5.3.1. Estudi de la variació de n i n_r	32
5.3.2. Comprovació de la representació amb les n originals i n rotades	35
6. Aplicacions de contorns en imatges	38
6.1. Pre-processament d'imatges en format tipus “.tif” ó “.bmp”	39
6.1.1. Funció <i>Graythresh</i> i <i>Im2bw</i>	39

6.1.2.	Funció de <i>Thinning</i>	40
6.1.3.	Algorisme <i>Bwboundaries</i>	42
6.2.	Pre-processament d'imatges en format ".mat"	43
7.	Proves.....	44
7.1.	Compressió d'un contorn format per varis traços.....	45
7.2.	Estudi traç a traç	47
7.3.	Ampliació del camp d'aplicació.....	51
7.3.1.	Prova de parametrització d'un contorn obert en 3D	51
7.3.2.	Prova de parametrització d'un fragment d'àudio	52
7.4.	Estudi dels errors en la reconstrucció.....	54
8.	Conclusions i línies de futur.	61
8.1.	Conclusions	62
8.2.	Línies de futur	63
9.	Bibliografia	65
10.	Annex.....	68

Resum de Treball Final de Carrera
Enginyeria Tècnica Industrial. Especialitat en Electrònica Industrial

Títol: Parametrització de contorns oberts

Paraules clau: Contorns oberts, parametrització de contorns, Fourier, Transformada ràpida de Fourier, FFT, Descriptors el·líptics de Fourier, EFD, descriptors de contorns

Autor: Jaume Danés Garolera

Direcció: Pere Martí Puig

Data: setembre de 2012

Resum

Un dels principals problemes quan es realitza un anàlisi de contorns és la gran quantitat de dades implicades en la descripció de la figura. Per resoldre aquesta problemàtica, s'aplica la parametrització que consisteix en obtenir d'un contorn unes dades representatives amb els mínims coeficients possibles, a partir dels quals es podrà reconstruir de nou sense pèrdues molt evidents d'informació. En figures de contorns tancats, la parametrització més estudiada és l'aplicació de la transformada discreta de Fourier (DFT). Aquesta s'aplica a la seqüència de valors que descriu el comportament de les coordenades x i y al llarg de tots els punts que formen el traç. A diferència, en els contorns oberts no es pot aplicar directament la DFT ja que per fer-ho es necessita que el valor de x i de y siguin iguals tan en el primer punt del contorn com en l'últim. Això és degut al fet que la DFT representa sense error senyals periòdics. Si els senyals no acaben en el mateix punt, representa que hi ha una discontinuïtat i apareixen oscil·lacions a la reconstrucció. L'objectiu d'aquest treball és parametritzar contorns oberts amb la mateixa eficiència que s'obté en la parametrització de contorns tancats. Per dur-ho a terme, s'ha dissenyat un programa que permet aplicar la DFT en contorns oberts mitjançant la modificació de les seqüències de x i y . A més a més, també utilitzant el programari Matlab s'han desenvolupat altres aplicacions que han permès veure diferents aspectes sobre la parametrització i com es comporten els Descriptors El·líptics de Fourier (EFD). Els resultats obtinguts han demostrat que l'aplicació dissenyada permet la parametrització de contorns oberts amb compressions òptimes, fet que facilitarà l'anàlisi quantitatiu de formes en camps com l'ecologia, medicina, geografia, entre d'altres.

Final Project Summary
Technical Industrial Engineering. Specialized in Industrial Electronics

Title: Parameterization of open contours

Keywords: Open contours, parameterization of contours, Fast Fourier Transform, FFT, Elliptic Fourier Descriptors, EFD, contours descriptors

Author: Jaume Danés Garolera

Director: Pere Martí Puig

Date: September 2012

Abstract

One of the main troubles when a contour analysis is made, involves the large number of data settling in the figure's description. To resolve this question, one method is applied, the parameterization which consists in obtain some representative data from a contour with the minimum possible coefficients, from which they may be reconstructed again without very much evident losses of information. In figures of closed contours the parameterization more studied is the application of the Discrete Fourier Transform (DFT). This one is applied to the sequence of values which describes the behaviour of the coordinates x and y along all points that form the trace. Unlike, in the open contours it can't be applied directly the DFT because to do so is needed that the value of x and y are equal as the first point of the contour as in the last. This is because the DFT representing periodic signals without error. If the signals don't end at the same point, means that there is a discontinuity and oscillations appear into the reconstruction. The goal of this work is to parameterize open contours with the same efficiency obtained in the parameterization of closed contours. To carry it out is has been designed a program that allows us to apply the DFT in open contours by modifying the x and y sequences. Moreover, also using Matlab software, other applications have been developed that have allowed to see different aspects about the parameterization and how the Elliptic Fourier Descriptors (EFD) behave. The obtained results showed that the designed application allows the parameterization of open contours with optimal compressions, to facilitate the quantitative analysis of shapes in fields such as ecology, medicine, geography, among others.

1. Introducció

La representació d'un contorn digitalitzat es pot extreure d'un objecte escanejat o d'una imatge i aquest està representat per una gran quantitat de dades.

Aquest elevat volum de dades és un dels problemes principals en anàlisis de contorns. Per resoldre aquesta problemàtica existeixen diferents mètodes matemàtics tals com l'Anàlisi de Components Principals (PCA), l'Anàlisi de les Components Independents (ICA) i la Parametrització, els quals redueixen el nombre de coeficients que defineixen un contorn.

La parametrització és un mètode força emprat en diferents camps com la biologia, la geografia o la medicina. Aquestes disciplines tenen en comú la realització d'anàlisis quantitius de formes i per tant, per dur-les a terme amb facilitat és necessària una parametrització dels contorns.

En biologia, a través d'estudis morfomètrics o d'anàlisi de la forma, poden identificar i classificar els objectes estudiats, permeten per exemple la diferenciació d'espècies animals com és el cas de l'estudi morfomètric sobre l'otòlit dels peixos (Tracy, 2006) com també determinar-ne el sexe i l'edat (Martí et al., 2011) on en ambdues investigacions s'ha aplicat la parametrització.

En vegetals, l'ús d'aquesta metodologia per la reducció de dades, ha permès dur a terme estudis morfomètrics per determinar diferències entre espècies com és el cas dels estudis en raves on gràcies a la determinació de diferències en la forma de l'arrel poden a més a més esbrinar quins factors biològics i ambientals influeixen en la seva forma (Iwata, 2004).

En el camp de la geografia, la parametrització també és utilitzada per facilitar l'estudi de corbes de nivell, identificació de límits de rius o volcans (Tort, 2003).

La parametrització doncs, permet aconseguir la informació més rellevant d'un contorn, fent possible la seva representació amb un nombre petit de coeficients i

facilitar-ne d'aquesta manera el seu anàlisi. Per dur-la a terme es pot fer a través de l'aplicació de la transformada discreta de Fourier (DFT). Aquesta s'aplica a la seqüència de valors que descriu el comportament de les coordenades x i y al llarg de tots els punts que formen el traç. Com a resultat d'aplicar la DFT, s'obtenen els coeficients el·líptics de Fourier (EFD) que s'apliquen a les coordenades del contorn (x,y) . Una de les raons per la seva àmplia acceptació és que els EFD poden representar tot tipus de corbes tancades i preservar la informació suficient per la seva reconstrucció, sense una pèrdua de qualitat notable, utilitzant un nombre limitat de coeficients.

Moltes de les anàlisis de contorns es fan a partir de figures tancades en els quals la parametrització es basa en l'aplicació de la transformada discreta de Fourier (DFT) ja que les coordenades x i y del primer punt tenen el mateix valor que l'últim (fig.1.1).

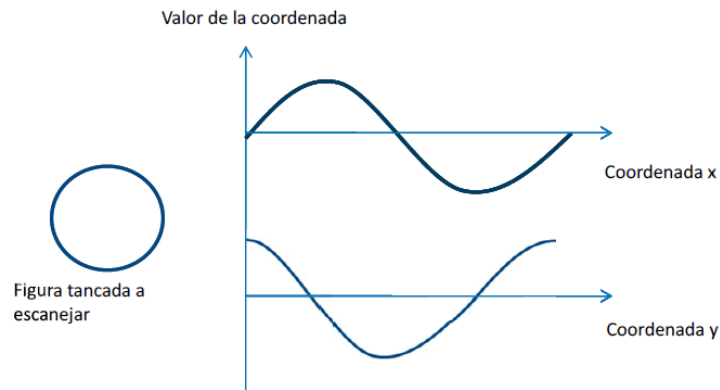


Fig. 1.1 Contorn tancat amb les seves seqüències $x(n)$ i $y(n)$.

No obstant degut a la diversitat de contorns possibles a examinar l'anàlisi de figures obertes també és necessari, però a diferència dels contorns tancats, en els oberts no es pot aplicar directament la DFT ja que per fer-ho es necessita que el

valor de x i de y siguin iguals tan en el primer punt del contorn com en l'últim i en les figures obertes això no succeeix (fig.1.2).

Alguns autors han treballat en aquest camp aplicant altres transformades com és el cas de l'estudi evolutiu del gènere Ammonites on a partir de l'anàlisi de la forma de les sutures de la closca de l'animal aplicant la transformada *Short Time Fourier* (STFT) van poder extraure diverses conclusions sobre els processos evolutius en la morfologia d'aquest animal (Allen, 2006).

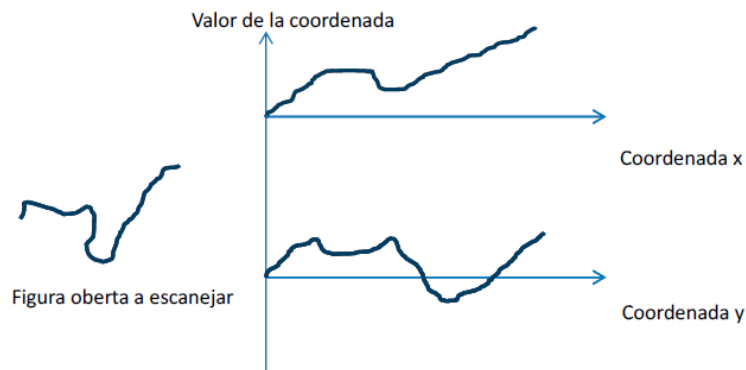


Fig. 1.2 Contorn obert amb les seves seqüències $x(n)$ i $y(n)$.

Per tal de resoldre aquesta problemàtica i amb la finalitat de millorar la qualitat de les anàlisis, aquest estudi s'ha centrat en poder aplicar la DFT a les seqüències de x i y dels contorns oberts, aplicant una matriu de rotació la qual permet modificar la posició de cada punt, rotant tota la seqüència i aconseguint així que el valor del primer punt sigui igual que el del últim (fig.1.3). D'aquesta manera les coordenades x i y adquireixen les mateixes característiques que un contorn tancat permeten així l'aplicació de la DFT.

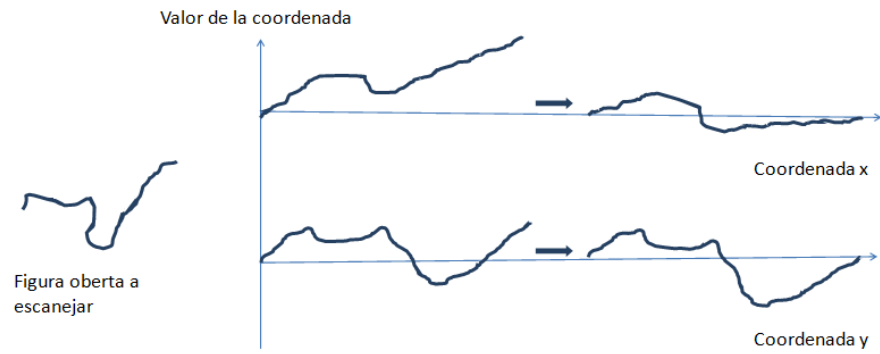


Fig. 1.3 Rotació de les seqüències $x(n)$ i $y(n)$.

2. Objectius i metodologia

2.1. Objectius

L'objectiu principal d'aquest projecte és parametritzar contorns oberts a partir de l'aplicació de la DFT. D'aquesta manera es pretén poder representar figures obertes amb un bon equilibri entre la preservació de la informació rellevant i la reducció de dades, així com també parametritzar els contorns oberts amb la mateixa qualitat amb que es parametritzen els contorns tancats.

La qualitat de la reconstrucció d'un contorn obert pot estar determinada per la influència de diferents factors en les propietats del nous EFDs. Per tant, amb l'objectiu d'estudiar el comportament dels EFDs en la descripció dels contorns i demostrar-ne la seva viabilitat, s'avaluarà la influència del nombre de coeficients implicats en la reconstrucció com també es testarà la importància dels descriptors de baixa complexitat en la parametrització de contorns oberts.

També s'avaluarà com es comporten els EFDs davant de l'angle (la rotació), la posició en l'espai (la translació) i la mida (el canvi d'escala) d'un contorn obert.

Donat que la fidelitat de la reconstrucció d'un contorn obert ve determinada per un nombre mínim de EFDs, s'examinarà si la determinació d'aquest nombre està relacionada amb la longitud o la morfologia del traç i quin d'aquests dos factors és més influent.

D'altra banda, es quantificarà l'error en la reconstrucció per tal de saber la precisió de reconstrucció en vers el nombre de coeficients complexos en que s'expressa el contorn.

Finalment es duran a terme varies proves amb els objectius de testar la metodologia desenvolupada, ampliar el seu camp d'aplicació i intentar una millora en la compressió.

2.2. Metodologia

La metodologia emprada es basa en crear diverses aplicacions a través del programari Matlab que ens permetin dur a terme els objectius del projecte.

Matlab és un entorn de computació numèrica i un llenguatge de programació que permet manipular fàcilment matrius, dibuixar funcions i dades, implementar algorismes i crear interfícies d'usuari entre d'altres.

En aquest projecte s'utilitzen tan les funcions estàndards del programari com també funcions específiques de la llibreria *Image Processing Toolbox*, per tal de poder processar les imatges.

Les imatges digitalitzades es tractaran amb les funcions del programa per tal de reconèixer els contorns de la imatge digitalitzada, tan si la seva extensió és “.mat” com si és “.tif” o “.bmp”.

L'extensió “.mat” pertany a arxius propis de Matlab, els quals guarden la informació estructurada en cel·les, on cada cel·la conté la informació d'un traç el qual forma part del contorn final. En aquest projecte, els arxius “.mat” contenen informació extreta d'una tauleta gràfica, a través de la qual s'ha digitalitzat la imatge.

Com a imatges d'estudi s'han utilitzat algunes obres del dibuixant basc Eduardo Chillida ja que els seus dibuixos estan constituïts per traços simples i ben definits. D'altra banda s'han utilitzat varies signatures degut a la diferent complexitat que poden presentar els traços.

Per tal d'aplicar la DFT, s'utilitzen funcions matemàtiques que prepararan les dades per poder aplicar la transformada i així extreure el nombre seleccionat de EFDs més representatius.

Finalment es procedirà a la reconstrucció del contorn mitjançant el nombre de coeficients amb els quals s'ha parametritzat i es veurà la seva reconstrucció en vers l'original per tal de comparar sí el nombre de EFDs és l'apropiat.

Complementàriament per observar com es comporten els EFDs en la descripció dels contorns i demostrar-ne la seva viabilitat s'han generat altres aplicacions.

En el cas d'aquest treball però, no s'aplicarà la DFT sinó la Transformada Ràpida de Fourier (FFT), la qual no és més que la DFT però amb un algorisme de càlcul molt més ràpid.

3. Precedents: descriptors de contorns tancats

La parametrització amb EFDs es va començar a aplicar en contorns tancats degut a la seves propietats per expressar-los. A continuació en els següents apartats es desenvoluparà com s'aplica la DFT a les coordenades $x(n)$ i $y(n)$ de contorns tancats per l'obtenció dels EFDs i la seva problemàtica en l'aplicació en contorns oberts.

3.1. Elliptic Fourier Descriptors (EFD)

Un contorn continu tancat amb un període de T es defineix per l'evolució de les seves coordenades $x(t)$ i $y(t)$ al llarg de la variació del temps. Les coordenades dels contorns poden ser desglossades utilitzant series de Fourier. Les coordenades de contorn, en el seu equivalent real o en formes complexes, poden ser escrites com:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} u_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \quad \text{Equació (3.1.1)}$$

$$y(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + d_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} v_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \quad \text{Equació (3.1.2)}$$

On:

$$u_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt \quad \text{i} \quad v_k = \frac{1}{T} \int_T y(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt \quad \text{Equació (3.1.3)}$$

Amb:

$$a_k = u_k + u_k^* \quad \text{i} \quad b_k = j(u_k - u_k^*) \quad \text{Equació (3.1.4)}$$

$$c_k = v_k + v_k^* \quad \text{i} \quad d_k = j(v_k - v_k^*) \quad \text{Equació (3.1.5)}$$

Els coeficients reals a_k , b_k , c_k i d_k esdevenen una alternativa per descriure perfectament el contorn i són conegudes com els coeficients el·líptics de Fourier

(EFD). És fàcil de veure des de l'equació (3.1.3) que els coeficients a_0 i c_0 només representen la posició del centre de gravetat del contorn. Si a_0 i c_0 tenen valor 0 el contorn se centra en l'origen. L'aproximació del contorn es basa en els EFDs i s'aconsegueix mitjançant la selecció d'un conjunt reduït de coeficients. Aquest és, a través de limitar el nombre d'harmònics, de la següent manera:

$$x_K(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \quad \text{Equació (3.1.6)}$$

$$y_K(t) = c_0 + \sum_{k=1}^K \left[c_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + d_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \quad \text{Equació (3.1.7)}$$

És evident que les aproximacions $x_K(t)$ i $y_K(t)$ milloren a mesura que augmenta K .

3.1.1. Descriptors EFD i la seva relació amb DFT

Els contorns de les imatges en 2D tenen una naturalesa continua i el que realment s'obté d'una imatge digital són senyals discrets $x(n)$ i $y(n)$ els quals poden ser entesos com a versions mostrejades de $x(t)$ i $y(t)$ en instants $t=nT/N$ on n va de 0 a $N-1$. A la pràctica, però, s'obtenen N parell de punts, un per les $x(n)$ i l'altre per les $y(n)$, per a un període fonamental (per cada punt n). Per tal de mostrar com el desenvolupament en sèrie de Fourier dels senyals discrets $x(n)$ i $y(n)$ pot estar relacionada amb la DFT, es considera primer, l'expansió de $x(t)$ en l'equació (3.1.1) i el seu complex equivalent a l'expressió de la següent manera:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} u_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} + u_{-k} e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} \right) \end{aligned} \quad \text{Equació (3.1.1.1)}$$

Amb l'objectiu d'obtenir senyals discrets $x(n)$ i $y(n)$ des de senyals continus s'han d'aplicar els següents canvis:

En primer lloc la t ha de ser reemplaçada per valors discrets de nT/N ($n=0, \dots, N-1$) en l'equació (3.1.1.1).

En segon lloc tenint en compte que la freqüència discreta més baixa capaç de ser representada és $\omega=2\pi/N$ i la més alta és $\omega=\pi$, el conjunt de freqüències analògiques $\omega_k=2\pi k/T$ on k va de 0 a ∞ , aquest esdevé $\omega_k=2\pi k/N$, on l'índex k va de 0 a $N/2$. Llavors $x(n)$ pren la forma de l'equació (3.1.1.2).

$$x(n) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right]$$

$$= \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} u_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} = u_0 + \sum_{k=1}^{k=N/2} \left(u_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + u_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} \right) \quad \text{Equació (3.1.1.2)}$$

De la mateixa manera els coeficients u_k poden ser trobats per l'equació (3.1.3) a través de canviar l'integral per un sumatori, on t es canvia per nT/N i dt per T/N , obtenint l'equació (3.1.1.3)

$$u_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{T} k \left(\frac{Tn}{N}\right)} \left(\frac{T}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} \quad \text{Equació (3.1.1.3)}$$

Així, a partir de la definició DFT, el u_k coeficients es poden obtenir com es mostra en la següent equació:

$$u_k = \frac{1}{N} X(k) \quad \text{Equació (3.1.1.4)}$$

$X(k)$ és l'element k de la DFT de $x(n)$. Segons la propietat coneguda de simetria conjugada de la DFT :

$$X(-k) = X^*(k) = X(N-k) \quad \text{Equació (3.1.1.5)}$$

D'aquesta manera $u_{-k} = u_k^*$. Aleshores utilitzant l'equació (3.1.2) l'últim terme de l'equació (3.1.1.2) esdevé:

$$x(n) = u_o + \sum_{k=1}^{k=N/2} \left(u_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + u_k^* e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right) \quad \text{Equació (3.1.1.6)}$$

Expressant u_k en formes polars, $u_k = |u_k| e^{j\varphi_k}$, a través de la forma d'Euler i l'equivalència $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$, s'obté l'equació (3.1.1.7).

$$\begin{aligned} x(n) &= u_o + \sum_{k=1}^{k=N/2} |u_k| \left(e^{j \frac{2\pi}{N} kn + j\varphi_k} + e^{-j \frac{2\pi}{N} kn - j\varphi_k} \right) \\ &= u_o + \sum_{k=1}^{k=N/2} 2|u_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn + \varphi_k\right) \\ &= u_o + \sum_{k=1}^{k=N/2} 2|u_k| \cos(\varphi_k) \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - 2|u_k| \sin(\varphi_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \end{aligned} \quad \text{Equació (3.1.1.7)}$$

Per tan des de l'equació (3.1.1.4) i l'equació (3.1.1.7) és fàcil obtenir els coeficients EFD de la de $x(n)$ des de la DFT de $x(n)$.

De la mateixa manera, $y(n)$ té una expressió formalment idèntica a $x(n)$, el coeficients c_k i d_k també s'obtenen a partir de la DFT de $y(n)$. Per tan:

$$\begin{aligned} a_0 &= u_o = \frac{X(0)}{N} & c_0 &= v_o = \frac{Y(0)}{N} \\ a_k &= 2|u_k| \cos(\varphi_k) = \frac{2 \operatorname{Re}[X(k)]}{N} & c_k &= 2|v_k| \cos(\varphi_k) = \frac{2 \operatorname{Re}[Y(k)]}{N} \\ b_k &= -2|u_k| \sin(\varphi_k) = -\frac{2 \operatorname{Im}[X(k)]}{N} & d_k &= -2|v_k| \sin(\varphi_k) = -\frac{2 \operatorname{Im}[Y(k)]}{N} \end{aligned} \quad \text{Equació (3.1.1.8)}$$

On $X(k)$ i $Y(k)$ són DFT's de $x(n)$ i $y(n)$ respectivament.

L'aproximació discreta de $x_K(n)$ i $y_K(n)$ ($K < N/2$) prenen la forma:

$$x_K(n) = a_0 + \sum_{k=1}^K \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \quad \text{Equació (3.1.1.9)}$$

$$y_K(n) = c_0 + \sum_{k=1}^K \left[c_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + d_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \quad \text{Equació (3.1.1.10)}$$

La DFT pot ser eficientment calculada pel seu algorisme ràpid, la Transformada Ràpida de Fourier (FFT) així obtenint els mateixos resultats però amb un temps de càlcul inferior.

Cal tenir en compte també que els descriptors el·líptics de Fourier poden ser modificats per ser invariants respecte a la mida, la rotació, o el punt de partida (Nixon i Aguado 2008).

A la figura 3.1.1.1 es representa un contorn de l'obra *Leku-Aldatu* de l'escultor i dibuixant basc Eduardo Chillida i les seqüències del traç $x(n)$ i $y(n)$ i en la figura 3.1.1.2 està representada la seva reconstrucció, mitjançant només 75 coeficients per $x(n)$ i 75 $y(n)$.

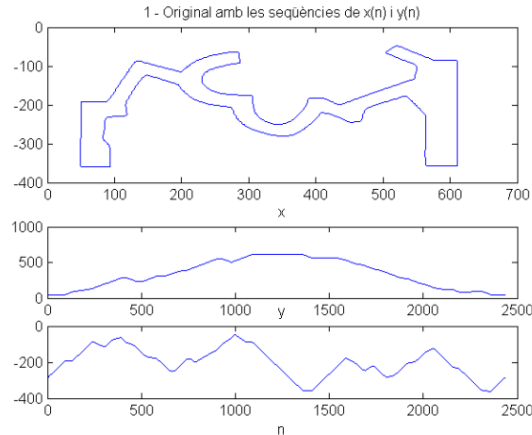


Fig. 3.1.1.1 Representació del contorn original i les seqüències de $x(n)$ i $y(n)$

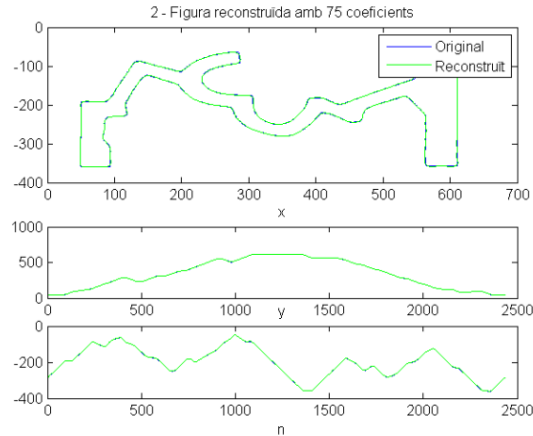


Fig. 3.1.1.2 Representació de la reconstrucció amb 75 coeficients per cada seqüència

3.2. Problemes dels EFD en els contorns oberts

En la parametrització de contorns oberts, com ja s'ha vist anteriorment, els resultats obtinguts d'aplicar directament la transformada Fourier o el seu algorisme de càlcul ràpid (FFT) no són eficients, ja que aquests coeficients estan idealitzats per a contorns tancats. Com mostra la figura 3.2.1 el resultat d'aplicar la FFT a les coordenades $x(n)$ i $y(n)$ d'un contorn obert és una reconstrucció poc eficient, ja que els coeficients "intenten" reconstruir una figura tancada. Tal com mostren les reconstruccions de les seqüències, tan de $x(n)$ com de $y(n)$, aquestes tenen tendència a acabar al mateix valor el qual començaven. És a dir, que la primera mostra $x(0)$ o $y(0)$ tendeix a tenir el mateix valor que $x(n)$ o $y(n)$, sent aquest el fet causant de la mala reconstrucció de la figura.

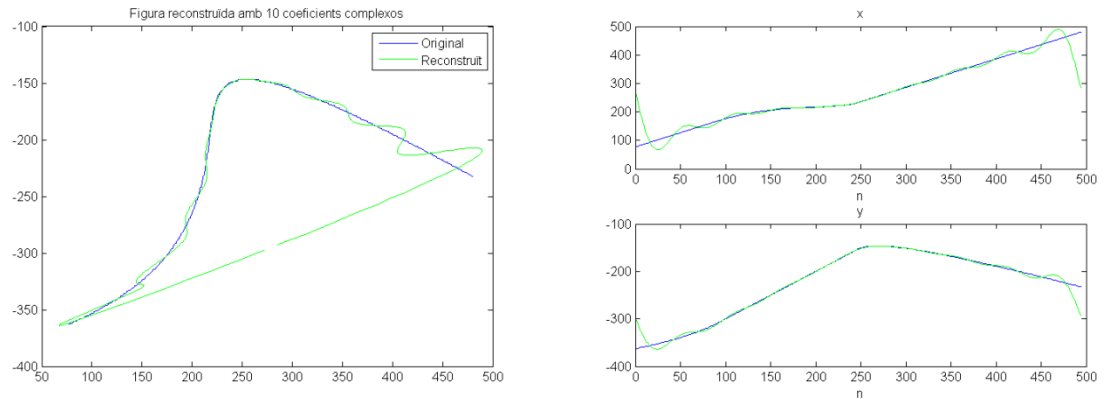


Fig. 3.2.1 Reconstrucció d'un contorn obert sense rotació de les seqüències $x(n)$ i $y(n)$.

Per tal de poder aplicar la FFT a les coordenades d'un contorn obert i evitar aquesta problemàtica, caldrà desenvolupar i aplicar la metodologia explicada en el següent capítol.

4. Modificació dels EFD per tal de que descriguin contorns oberts

Per tal de que els contorns oberts es comportin com en la figura 4.1 on es representa el cas real de les seqüències d'una figura tancada, caldrà efectuar la rotació de cada un dels valors de la seqüència $x(n)$ i de $y(n)$, abans d'aplicar la transformada.

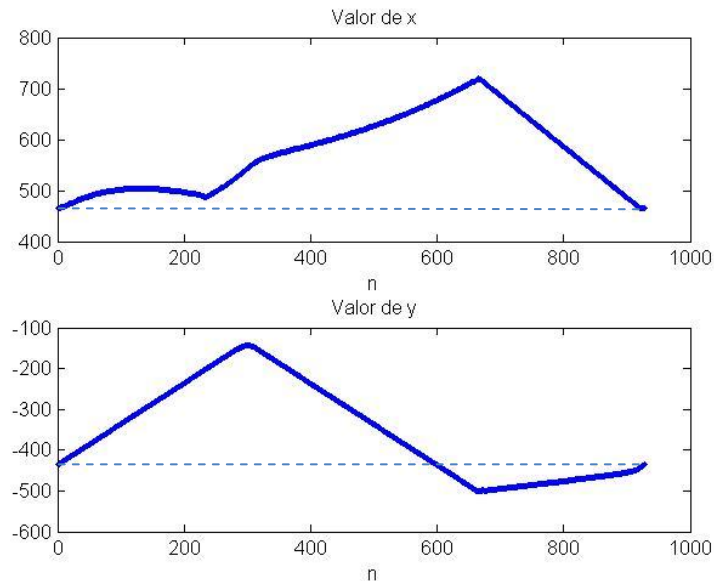


Fig. 4.1 Exemple de seqüències $x(n)$ i $y(n)$ d'un contorn tancat on s'aprecia que l'inici i el final tenen el mateix valor.

No obstant, cada seqüència necessitarà un angle de rotació diferent. Per l'obtenció d'aquest angle serà necessari fer el símil de la seqüència amb un triangle rectangle on el contorn de la figura esdevé la hipotenusa. El sinus s'obté a partir de la diferència entre el valor del primer i últim punt de la seqüència, mentre que el cosinus quedarà definit pel nombre de punts de la seqüència (fig. 4.2).

Finalment per obtenir l'angle de rotació de cada seqüència caldrà aplicar la següent formula:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Sin}}{\text{Cos}}\right) \quad \text{Equació (4.1)}$$

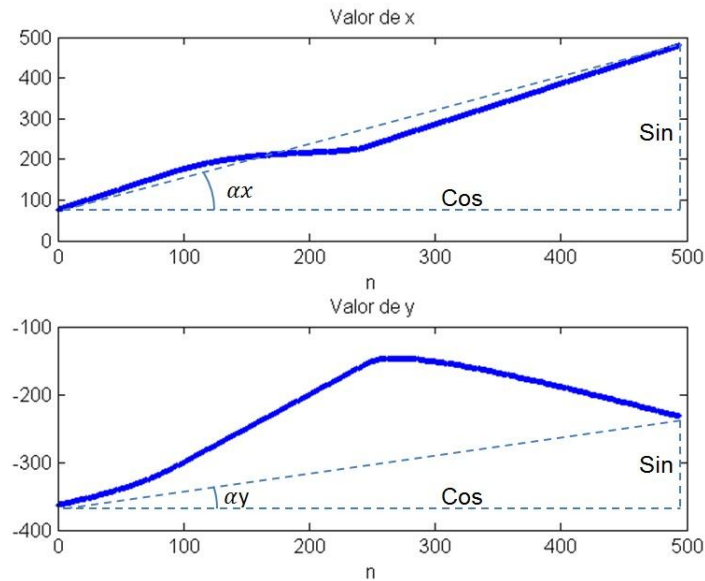


Fig. 4.2 Exemple de seqüències $x(n)$ i $y(n)$ d'un contorn obert on s'aprecia que l'inici i el final no tenen el mateix valor.

Un cop conegut el valor de l'angle per cada seqüència, aquests es disposen en matrius de rotació (equació 4.2).

$$R_x = \begin{bmatrix} \text{Cos } \alpha_x & -\text{Sin } \alpha_x \\ \text{Sin } \alpha_x & \text{Cos } \alpha_x \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \text{Cos } \alpha_y & -\text{Sin } \alpha_y \\ \text{Sin } \alpha_y & \text{Cos } \alpha_y \end{bmatrix} \quad \text{Equació (4.2)}$$

D'altre banda la informació de les seqüències $x(n)$ i $y(n)$ s'expressen en format matricial com es mostra a l'equació (4.3).

$$\begin{bmatrix} \text{Valor 1} & n0 \\ \text{Valor 2} & n1 \\ \text{Valor 3} & n3 \\ \vdots & \vdots \\ \text{valor } n & N - 1 \end{bmatrix} \quad \text{Equació (4.3)}$$

Per tal de poder rotar punt a punt es multiplicarà la matriu de rotació (equació 4.2) amb la matriu de les seqüències (equació 4.3) obtenint així una nova matriu que representarà la mateixa seqüència però en aquest cas, rotada.

L'aplicació de les rotacions a les seqüències de $x(n)$ i $y(n)$ ha permès representar la figura 4.1. amb els mateixos coeficients complexos que esta representada la figura 3.2.1. però amb una qualitat de reconstrucció acceptable a diferència de l'anterior.

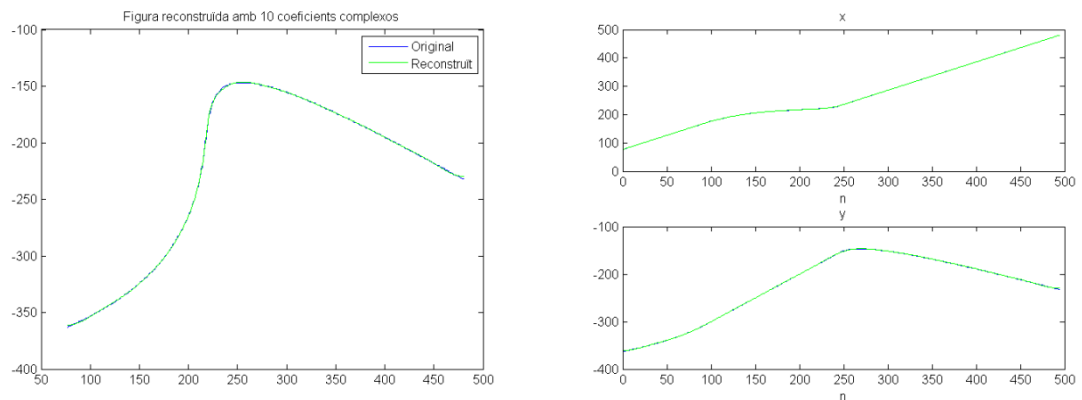


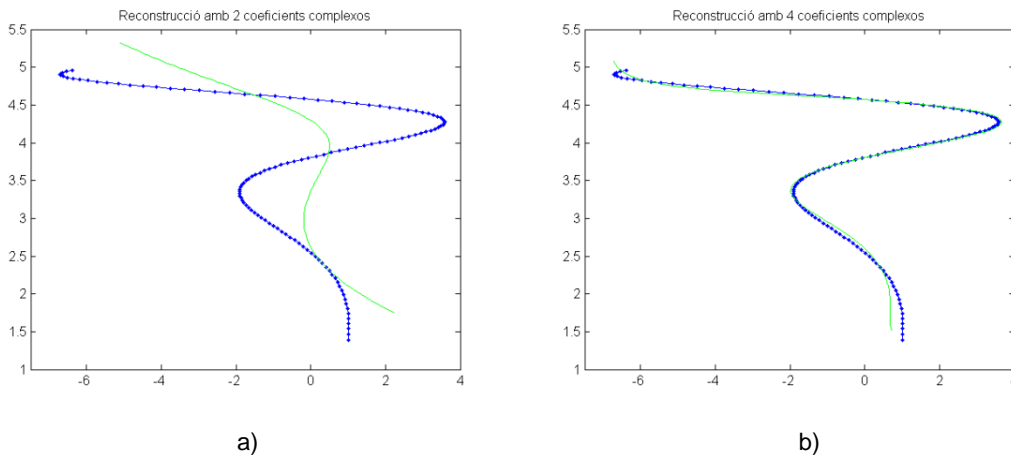
Fig. 4.1 Contorn obert aplicant la FFT a les coordenades $x(n)$ i $y(n)$ rotades

5. Estudi dels nous descriptors

La qualitat de la reconstrucció d'un contorn obert a partir dels nous EFDs pot venir determinada per la influència de diferents factors en les propietats del nous descriptors. En aquest apartat s'avaluarà en primer lloc la influència del nombre de coeficients en la reconstrucció. En segon lloc, s'examinaran les propietats dels nous descriptors davant l'angle (la rotació), la posició en l'espai (la translació) i la mida (el canvi d'escala) d'un contorn obert. I finalment en tercer lloc, per obtenir més informació sobre els paràmetres utilitzats en la reconstrucció s'estudiaran els descriptors de baixa complexitat.

5.1. Influència del nombre de coeficients en la reconstrucció

La parametrització mitjançant diferents nombres de coeficients complexos comportarà una reconstrucció amb diferents nivells de qualitat tal i com es mostra en la figura 5.1.1.



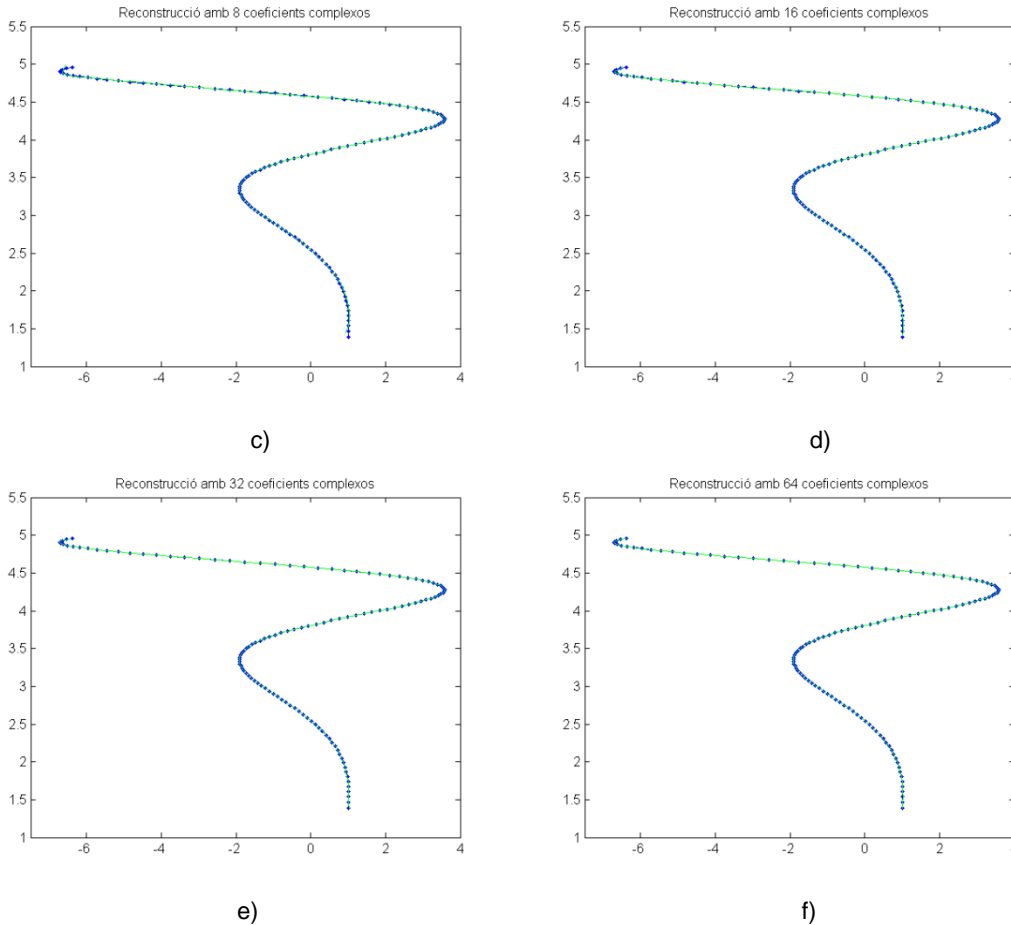


Fig. 5.1.1 Representació per la reconstrucció amb 2 (en a), 4 (en b), 8 (en c), 16 (en d), 32 (en e) i 64 (en f) coeficients complexos d'un contorn obert.

Els resultats mostren que la reconstrucció a partir de dos coeficients té molt poca exactitud, no obstant esdevé una millora molt ràpida al afegir-hi pocs coeficients com es pot observar entre les reconstruccions a partir de 2 i de 4 coeficients (figura 5.1.1.a i figura 5.1.1.b respectivament). La millora de qualitat s'estabilitza a partir de 16 coeficients, on la reconstrucció del contorn d'exemple és d'alta precisió, i a mesura que s'incrementa el nombre de coeficients no s'observa un augment de la qualitat com es pot veure amb les figures 5.1.1.d,e,f.

5.2. Propietats dels descriptors davant de rotacions, translacions i canvis d'escala

En aquest apartat s'estudiarà el comportament dels EFDs davant de rotacions translacions i canvis d'escala d'un contorn per comprovar si són invariants en relació a aquests factors.

5.2.1. Estudi en vers les rotacions

A la figura 5.2.1.1 es pot observar com evolucionen les seqüències de $x(n)$ i $y(n)$ en funció de la rotació d'un mateix contorn.

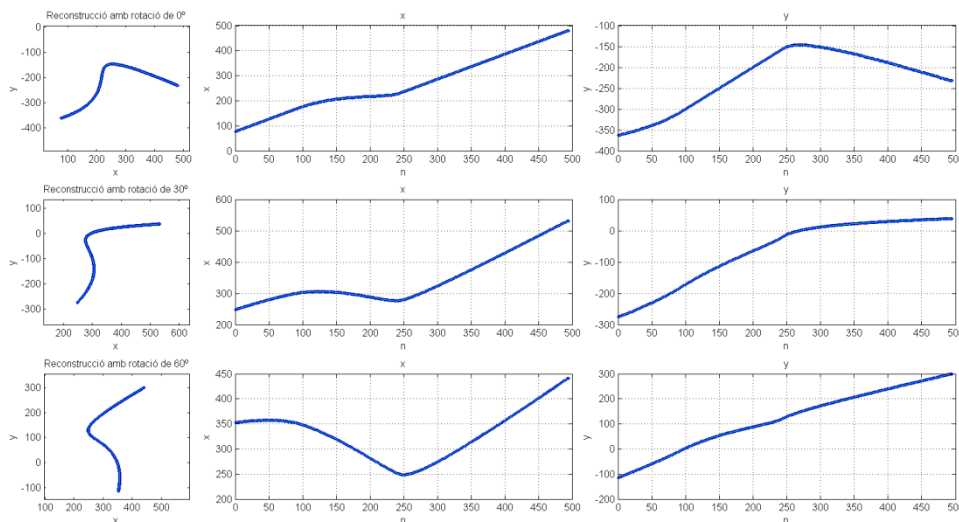


Fig. 5.2.1.1 Reconstrucció del contorn rotat amb 3 angles diferents.

En les rotacions aplicades s'aprecia com les seqüències prenen formes diferents com si es tractés de 3 traços diferents. D'aquesta manera els resultats mostren que els EFD's també prenen valors diferents per a cada una de les rotacions com s'observa a la figura 5.2.1.2.

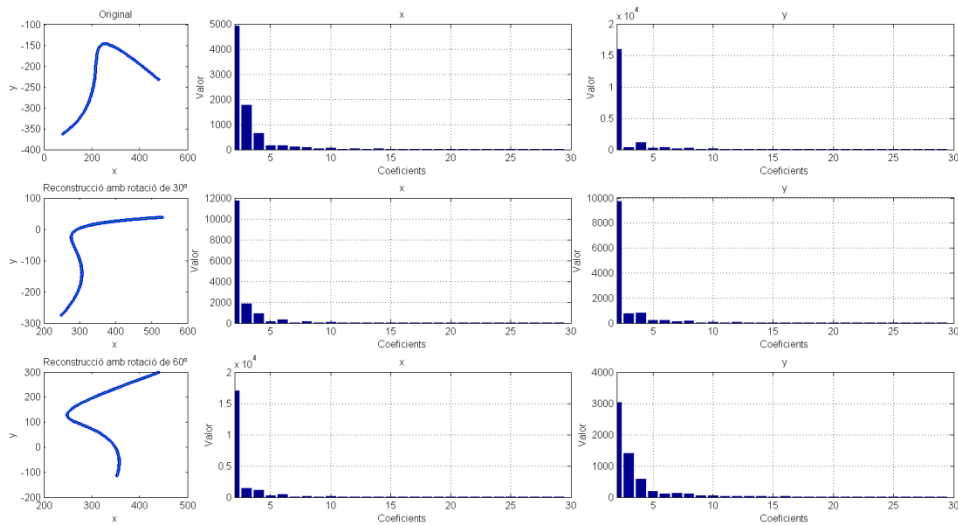


Fig. 5.2.1.2 Valor dels coeficients amb que s'expressa el contorn per a cada rotació.

Arran de que els valors dels EFDs difereixen per les tres rotacions aplicades, es pretén avaluar el comportament del mòdul del vector format per els EFDs de cada punt del contorn. S'esperaria que aquests mòduls, per a cada punt del contorn, fossin iguals per a les diferents rotacions.

Per dur-ho a terme s'aplicarà l'equació 5.2.1.1, on Xr_trun correspon a les components de Fourier per la coordenada x i Yr_trun a les components de la coordenada y .

$$\sqrt{|Xr_trun|^2 + |Yr_trun|^2} \text{ Equació (5.2.1.1)}$$

En la representació dels mòduls (fig. 5.2.1.3) les components s'han representat de la 2^a a la 10^a, ja que la primera no és significativa, aquesta només és "l'offset" de la figura. A partir de la 10^a component en endavant tampoc han estat representades degut a que aquestes pràcticament no contenen informació.

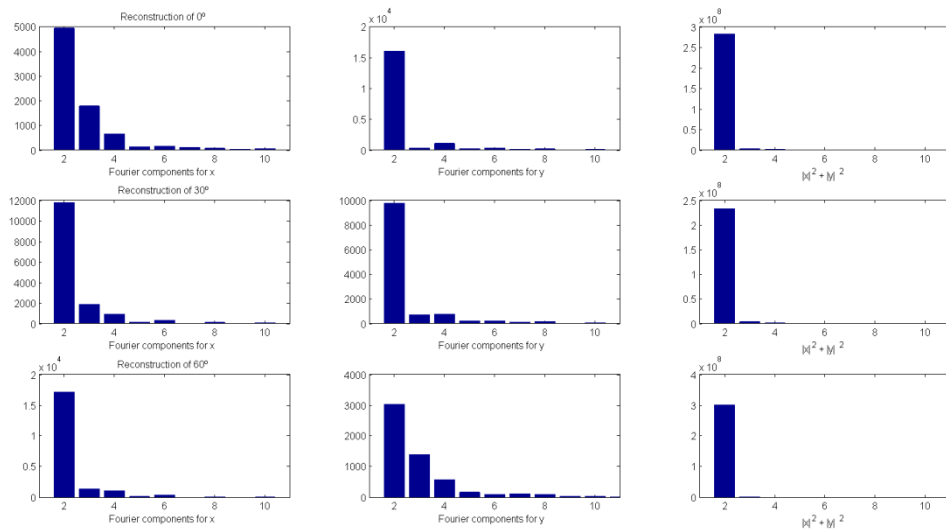


Fig. 5.2.1.3 Mòduls dels vectors que formen els EFDs

Els mòduls de les diferents components no són iguals per totes les rotacions malgrat tinguin una similitud. Per tant els EFD no són invariables davant les rotacions.

5.2.2. Estudi en vers les translacions

Per tal d'observar el comportament dels EFDs en un contorn desplaçat del seu punt d'origen, caldrà inicialment fer la seva translació. Per dur-ho a terme, s'afegiran offsets al contorn permetent així el desplaçament d'aquest per les coordenades x, y com també pels dos eixos com es mostra a la figura 5.2.2.1.

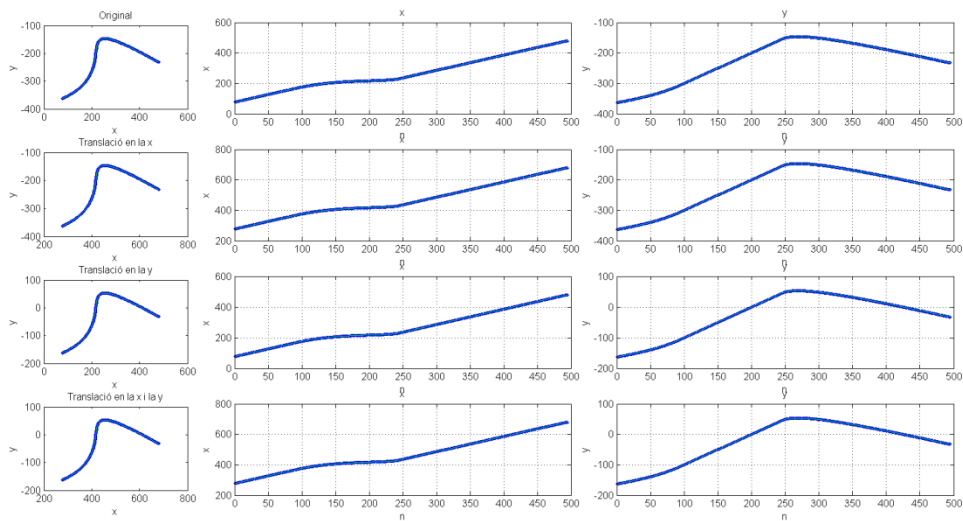


Fig. 5.2.2.1 Reconstrucció d'un contorn obert amb varis desplaçaments sobre els eixos x i y.

A diferència de les rotacions, per les translacions es pot observar que el comportament de les seqüències és exactament igual per totes les figures, és a dir, que tots tenen la mateixa morfologia i mida, tan sols canvia la posició.

L'anàlisi dels EFDs mostra que aquests són iguals per a les 3 translacions (fig. 5.2.2.1.)

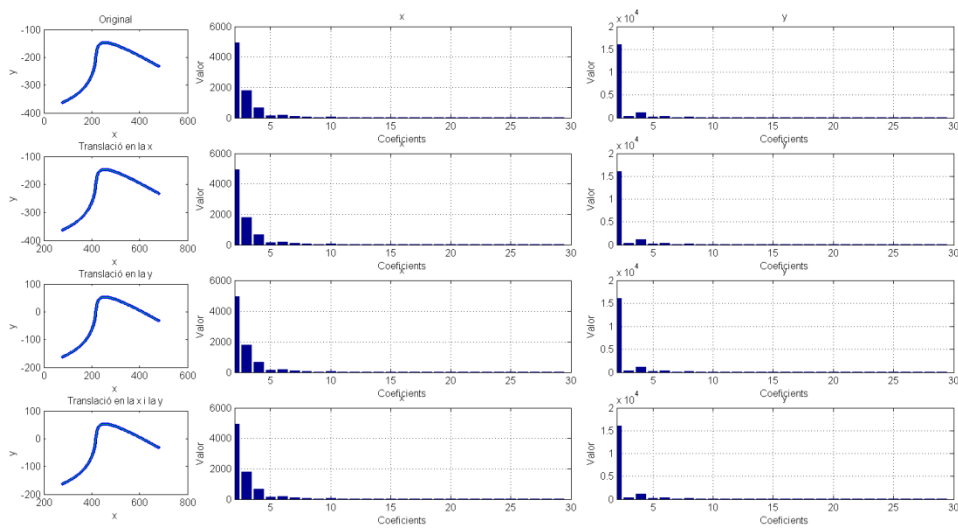


Fig. 5.2.2.2 Valor dels coeficients amb que s'expressa el contorn per a cada translació.

En aquest cas per tan, els EFD es mostren invariants independentment de la translació.

5.2.3. Estudi dels descriptors davant dels canvis d'escala

En la figura 5.2.3.1 s'observen les reconstruccions i morfologia de les seqüències de x i y d'un mateix contorn en funció del canvi d'escala.

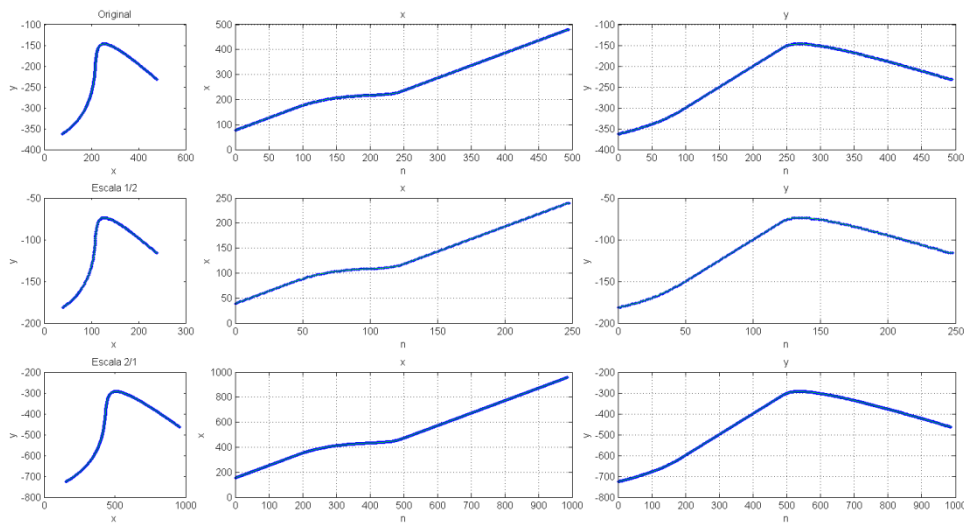


Fig. 5.2.3.1 Reconstrucció d'un contorn obert amb tres canvis d'escala.

En el canvi d'escala les seqüències mantenen la mateixa morfologia tal i com succeeix en la translació, no obstant la mida d'aquestes difereix en funció de l'escala en que es representa el contorn.

L'error en la reconstrucció, amb el mateix nombre de coeficients complexos per cada figura, és el mateix pels tres casos, igual que amb les proves de rotacions i translacions.

En aquest cas els EFDs no són iguals com s'observa a la figura 5.2.3.2, però sí proporcionals en relació al canvi d'escala.

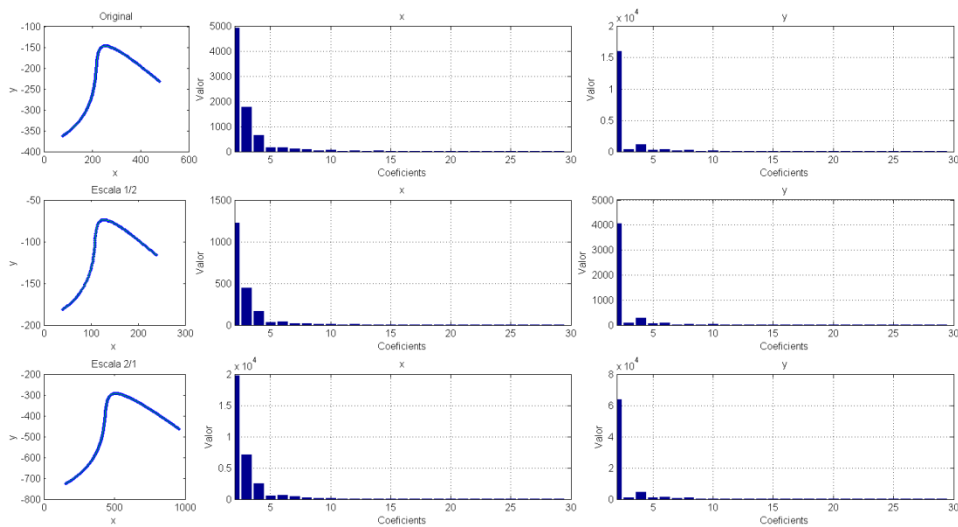


Fig. 5.2.3.2 Valor dels coeficients amb que s'expressa el contorn per a cada escala.

5.3. Descriptors de baixa complexitat

En la reconstrucció de contorns també intervenen els descriptors de baixa complexitat. Aquest venen definits pel nombre de punts del contorn analitzat. En aquest estudi, els contorns de baixa complexitat estan representats per els paràmetres n i n_r .

El paràmetre n ve determinat per la quantitat de punts que té un contorn. Cada punt o "píxel" que compona el contorn ve representat per una n , que va des de $n(0)$, $n(1)$, $n(2)$, ..., a $n(n^{\circ} \text{ total de píxels}-1)$.

Al rotar amb un angle α la seqüència de punts d'una coordenada, per després poder aplicar la FFT, n es veu afectada passant a tenir valors diferents de la n original, per propietats geomètriques (fig. 5.3.1). Aquesta nova n s'anomenarà n rotada (n_r).

Una reconstrucció amb n original permetria un estalvi de l'emmagatzematge de dades degut a que el paràmetre n són els nombres enters i iguals per a cada

seqüència. Per contra els paràmetres n_r són nombres decimals i diferents per cada seqüència.

Donades aquestes premisses, l'objectiu d'aquest apartat és testar si hi ha diferències entre la reconstrucció del contorn mitjançant els paràmetres n o n_r .

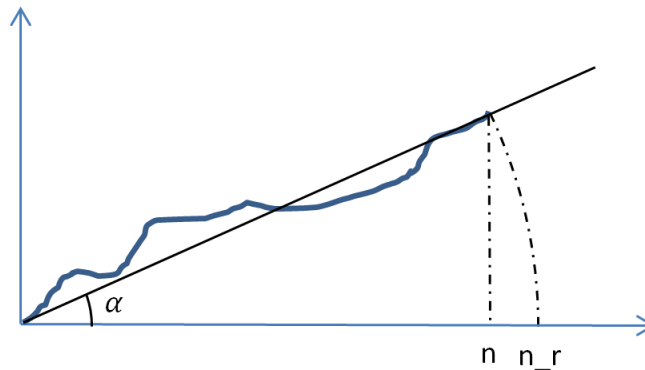


Fig. 5.3.1 Detall de com varien les n al rotar els punts d'una seqüència

5.3.1. Estudi de la variació de n i n_r

La variació en percentatge entre n i n_r es calcula a partir de l'equació (5.3.1.1) per la seqüència $x(n)$ i l'equació (5.3.1.2) per la seqüència $y(n)$, utilitzant en ambdós casos l'últim valor de la seqüència, tan pel punt original ($n(end)$) com pel rotat ($n_r(end)$).

$$\%(x) = \frac{n(end) - n_r(end)}{n(end)} \quad \text{Equació (5.3.1.1)}$$

$$\%(y) = \frac{n(end) - n_r(end)}{n(end)} \quad \text{Equació (5.3.1.1)}$$

S'observarà aquest percentatge a partir de quatre contorns, els mostrats a la figura 3.1.1, on cada un d'ells serà representat amb un nombre de punts diferent, és a dir, es tindrà el mateix traç representat amb 16, 32, 64, 128, 256, 512 i 1024 punts.

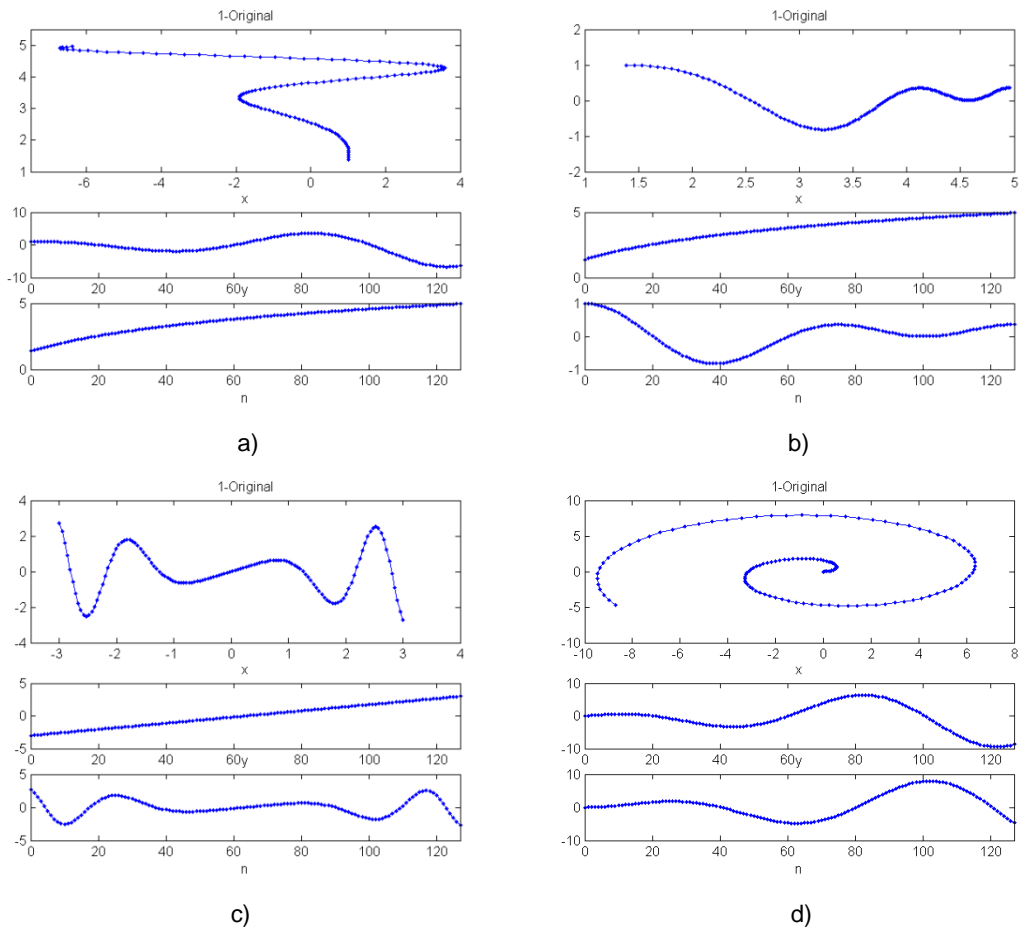


Fig. 5.3.1.1 Contorns originals amb els que es farà la prova

Els resultats numèrics per a cada contorn són els expressats en les taules 5.3.1.1, 5.3.1.2, 5.3.1.3 i 5.3.1.4.

nº N	n (end)	nx_r (end) (%)	ny_r (end) (%)
16	15	16.3284 (8.8560%)	15.7106 (4.7373%)
32	31	31.7016 (2.2632%)	31.3573 (1.1526%)
64	63	63.3310 (0.5254%)	63.1785 (0.2833%)
128	127	127.1569 (0.1235%)	127.0891 (0.0702%)
256	255	255.0759 (0.0298%)	255.0445 (0.0175%)
512	511	511.0373 (0.0073%)	511.0223 (0.0044%)
1024	1023	1023.0184 (0.0018%)	1.0230. 0111 (0.0011%)

Taula 5.3.1.1 Variació de la nx_r i ny_r en front a n pel primer contorn.

nº N	n (end)	nx_r (end) (%)	ny_r (end) (%)
16	15	15.7106 (4.7373%)	14.9697 (0.2020%)
32	31	31.3573 (1.1526%)	30.9858 (0.0458%)
64	63	63.1785 (0.2833%)	62.9931 (0.0110%)
128	127	127.0891 (0.0702%)	126.9966 (0.0027%)
256	255	255.0445 (0.0175%)	254.9983 (0.0007%)
512	511	511.0223 (0.0044%)	510.9991 (0.0002%)
1024	1023	1023.0111 (0.0011%)	1.022.9996 (0.00003%)

Taula 5.3.1.2 Variació de la nx_r i ny_r en front a n pel segon contorn.

nº N	n (end)	nx_r (end) (%)	ny_r (end) (%)
16	15	15.0413 (0.2753%)	15.0292 (0.1947%)
32	31	31.0052 (0.0168%)	31.0036 (0.0116%)
64	63	63.0006 (0.0010%)	63.0004 (0.0006%)
128	127	127.0001 (0.0001%)	127.0001 (0.0001%)
256	255	255.0000 (0%)	255.0000 (0%)
512	511	511.0000 (0%)	511.0000 (0%)
1024	1023	1023 (0%)	1023 (0%)

Taula 5.3.1.3 Variació de la nx_r i ny_r en front a n pel tercer contorn.

nº N	n (end)	nx_r (end) (%)	ny_r (end) (%)
16	15	17.6826 (17.8840%)	15.0073 (0.0487%)
32	31	32.3808 (4.4542%)	31.1019 (0.3287%)
64	63	63.6385 (1.0135%)	63.1272 (0.2019%)
128	127	127.2991 (0.2355%)	127.0881 (0.0694%)
256	255	255.1437 (0.0564%)	255.0508 (0.0199%)
512	511	511.0703 (0.0138%)	511.0271 (0.0053%)
1024	1023	1023.0348 (0.0034%)	1023.0140 (0.0014%)

Taula 5.3.1.4 Variació de la nx_r i ny_r en front a n pel quart contorn.

Els resultats obtinguts pels quatre contorns analitzats mostren que un increment del nombre de punts del contorn comporta una menor diferència entre les n i les n_r . També s'aprecia que en figures més rectilínies l'error és menor, amb un error màxim trobat de 17,9%. Aquest valor és un pic molt elevat comparat amb la resta de valors, els quals a partir del segon pic decreixen a 8.86% succeint en contorns de 16 punts, fet molt poc freqüent en els contorns que s'analitzen provinents

d'imatges. Per valors més comuns en la definició de contorns les diferències entre n i n_r esdevenen inclús del 0%.

5.3.2. Comprovació de la representació amb les n originals i n rotades

Per posar en pràctica els resultats obtinguts en el subapartat anterior, es reconstrueixen els mateixos contorns mitjançant la n i n_r permetent així testar visualment si existeixen diferències en la reconstrucció.

Els quatre contorns reconstruïts es representen a les figures 5.3.2.1, 5.3.2.2, 5.3.2.3 i 5.3.2.4 de les quals l'apartat a) mostren els contorns reconstruïts mitjançant les n rotades, mentre que en l'apartat b) els contorn representats utilitzant les n originals.

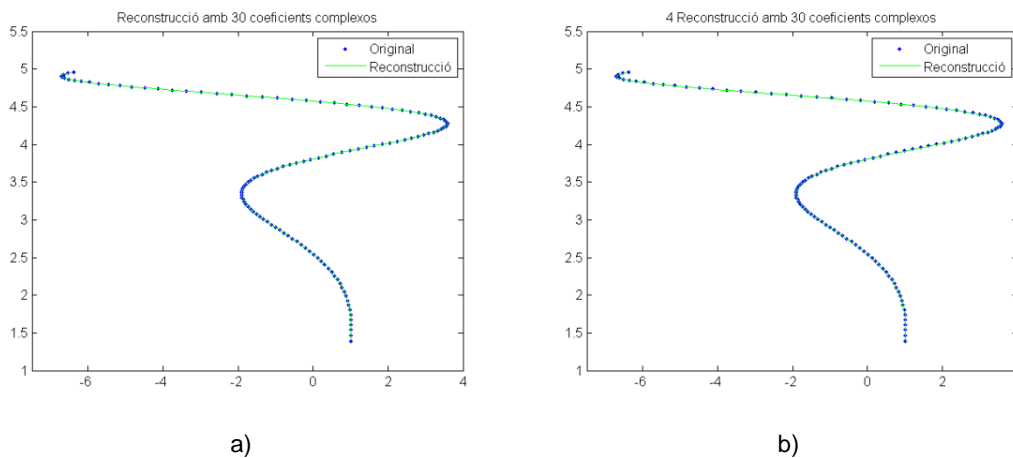
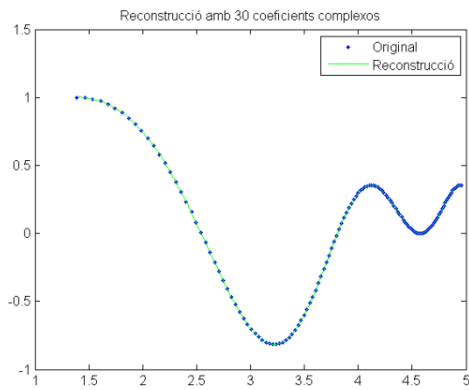
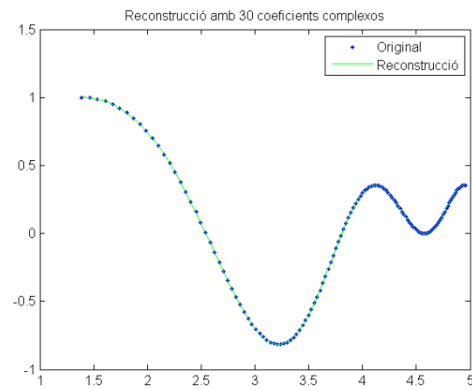


Fig. 5.3.2.1 a) Contorn reconstruït mitjançant n_r . b) Contorn reconstruït mitjançant n .

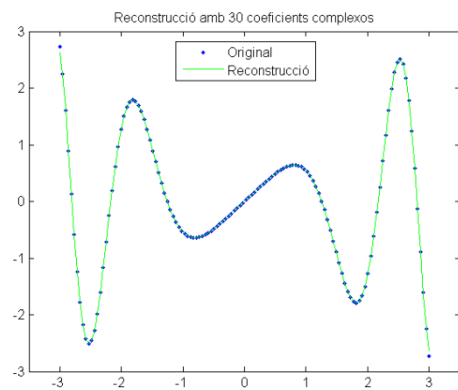


a)

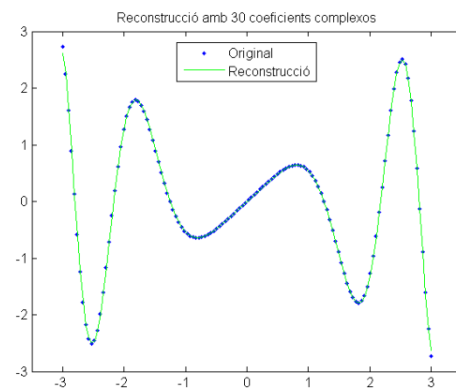


b)

Fig. 5.3.2.2 a) Contorn reconstruït mitjançant n_r . b) Contorn reconstruït mitjançant n .



a)



b)

Fig. 5.3.2.3 a) Contorn reconstruït mitjançant n_r . b) Contorn reconstruït mitjançant n .

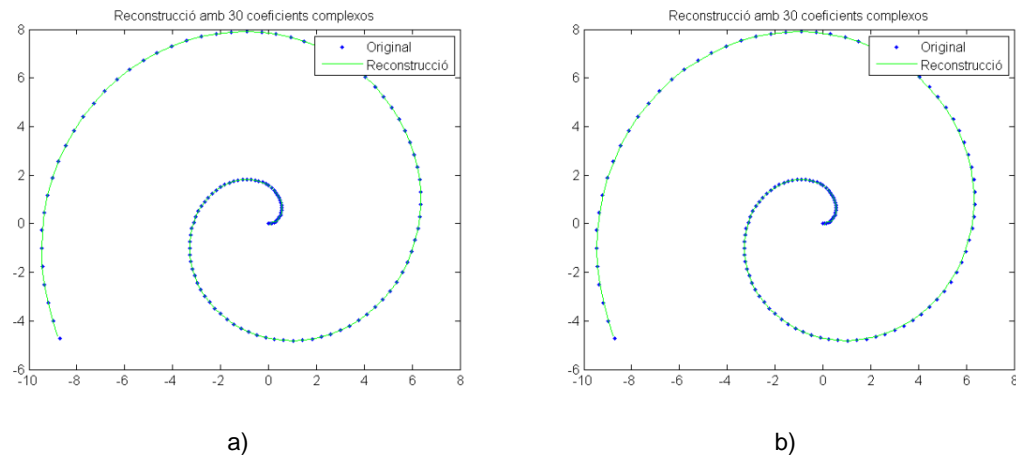


Fig. 5.3.2.4 a) Contorn reconstruït mitjançant n_r . b) Contorn reconstruït mitjançant n .

En els resultats visuals de la reconstrucció d'aquests quatre contorns no es percep cap diferència pel que fa a la reconstrucció entre els paràmetres n i n_r .

6. Aplicacions de contorns en imatges

En aquest apartat s'explica, en primer lloc, la manera d'obtenir un contorn obert tan a partir d'una imatge digital provinent d'arxius tipus ".tif" o "bmp" com a partir d'un arxiu tipus ".mat". I en segon lloc quines funcions s'apliquen en un contorn per posteriorment parametritzar-lo, aplicant les rotacions i la FFT corresponents.

6.1. Pre-processament d'imatges en format tipus ".tif" ó ".bmp"

Per tal d'eliminar els sorolls i les imperfeccions de les imatges digitalitzades en format tipus ".tif" ó ".bmp", i obtenir la reconstrucció del contorn expressat en binari i definit amb el mínim gruix possible, cal aplicar les funcions *Graythresh* i *Im2bw*, *Thinning* i *Bwboundaries*.

6.1.1. Funció *Graythresh* i *Im2bw*

Les funcions *Graythresh* i *Im2bw* permeten conjuntament convertir una imatge de diferents tons a una imatge binària. La primera funció permet calcular el llindar global a partir del mètode de Otsu el qual per minimitzar la variància entre grups de píxels blancs i negres, estableix un valor d'intensitat normalitzat en un rang de 0 a 1, anomenat eficàcia mètrica (EM). Aquest valor indica el nivell del llindar de la imatge d'entrada.

A continuació la funció *Im2bw* finalment converteix la imatge d'entrada definida en escala de grisos o color a una imatge binària. La imatge de sortida (fig. 6.1.1.2) que dona la funció, substitueix tots els píxels de la imatge d'entrada (fig. 6.1.1.1) amb luminància major que el valor del llindar obtingut per la funció *Graythresh* amb el valor 1 (blanc) i substitueix tots els altres píxels amb el valor 0 (negre).



Fig. 6.1.1.1 Imatge en escala de grisos

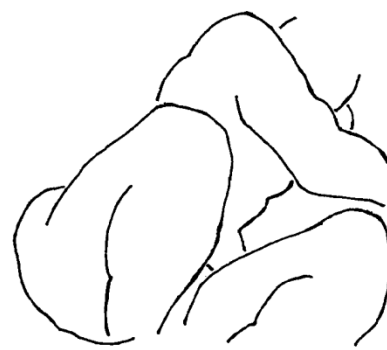


Fig. 6.1.1.2 Imatge binària

6.1.2. Funció de *Thinning*

Aquest algorisme permet reduir el contorn a la mínima expressió pel que fa a la seva amplada, és a dir, disminueix el gruix indeterminat del contorn a un gruix d'un píxel d'amplada.

En imatges sense forats, aquest elimina píxels de manera es redueix a un mínim traç continu. En canvi, per un objecte amb forats redueix el contorn a un anell amb el mínim traç possible a mig camí entre el forat i el seu contorn extern.

Formalment, l'algorisme de *Thinning* es pot definir com:

$$A \otimes \{B\} = \left(\dots \left((A \otimes B^1) \otimes B^2 \right) \dots \right) \otimes B^N \quad \text{Equació (6.1.2.1)}$$

$$\{B\} = (B^1, B^2, B^3, \dots, B^N) \quad \text{Equació (6.1.2.2)}$$

On \otimes representa l'aplicació d'aquest algorisme sobre la imatge A, a partir d'un conjunt d'elements estructurals B, on B^i és una rotació de 90° de B^{i+1} (fig. 6.1.2.1).

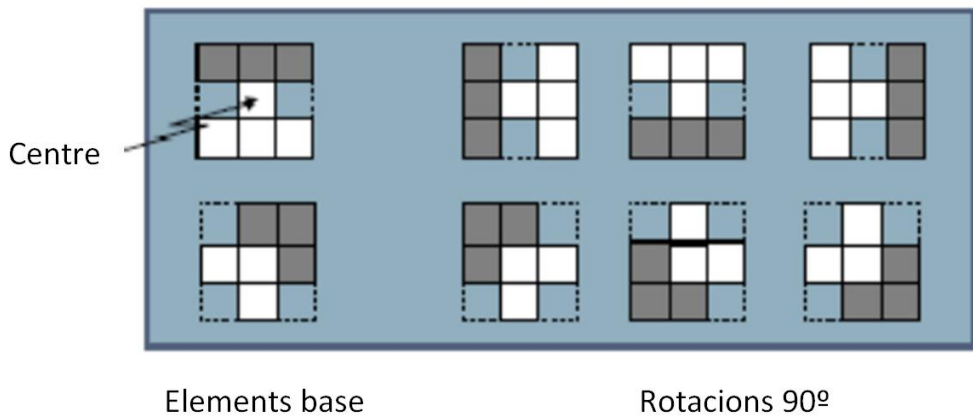


Fig. 6.1.2.1 Exemple de mascara de Thinning

A través d'aquest algorisme, cada píxel del contorn es comparat amb els seus píxels veïns per tal de determinar si cal la seva eliminació, fins a obtenir el mínim gruix possible del contorn sense trencaments.

A continuació es mostra un exemple de l'evolució dels resultats obtinguts en cada pas de l'algorisme:

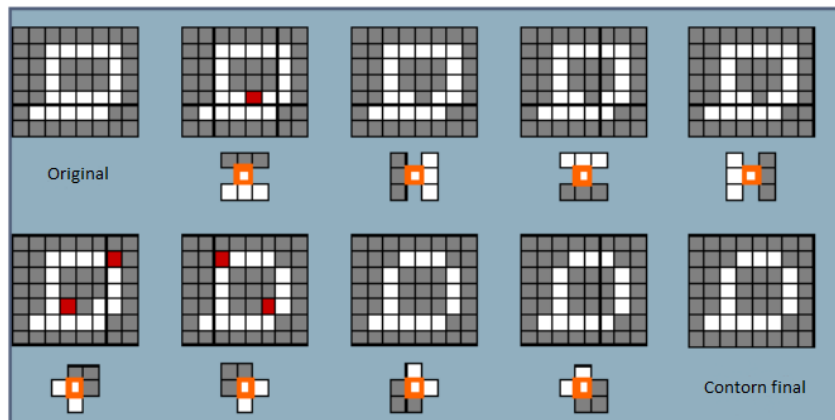


Fig. 6.1.2.2 Exemple algorisme de Thinning

D'altre banda la figura 6.1.2.4 mostra en un exemple pràctic després de l'aplicació de l'algorisme de *Thinning* sobre els traços del dibuix representat en la figura 6.1.2.3.

Es pot observar amb exactitud un fragment d'un dels traços que formen el dibuix, el qual només té un píxel a la figura 6.1.2.5.



Fig. 6.1.2.3 Imatge binària

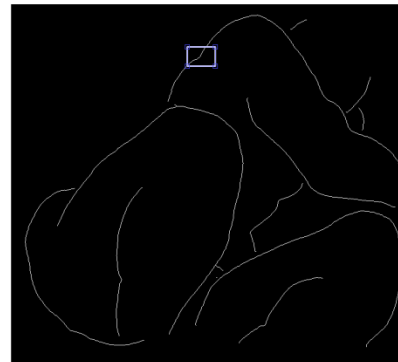


Fig. 6.1.2.4 Imatge binària després d'aplicar el *Thinning*

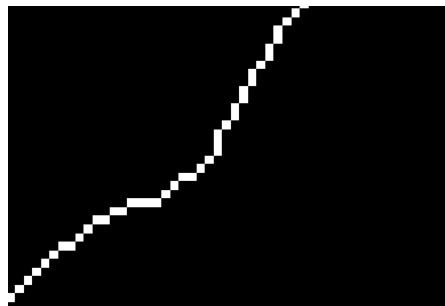


Fig. 6.1.2.5 Aproximació de la imatge amb la funció de *Thinning* aplicada

6.1.3. Algorisme *Bwboundaries*

En aquest treball, la funció *Bwboundaries* s'aplica per obtenir les coordenades de cada un dels píxels que forma el contorn.

La funció *Bwboundaries* traça els límits exteriors dels objectes d'una imatge binària, on els píxels diferents de zero pertanyen a un contorn i els iguals a zero

constitueixen el fons. S'agafarà d'aquest els punts que hi ha per sobre del traç, ignorant la resta, ja que sinó s'obtindrien les coordenades del contorn del traç i no les del traç en qüestió, obtenint aquest amb un píxel d'offset, cosa que és indiferent pel seu tractament.

Finalment d'aquesta manera s'obtindrà un seguit de cel·les on cada una d'elles contindrà la informació d'un traç de la imatge. Aquesta informació està ordenada amb una matriu de dues columnes on hi han les coordenades $x(n)$ i $y(n)$ respectivament.

6.2. Pre-processament d'imatges en format “.mat”

Els arxius “.mat” tractats en aquest projecte s'han obtingut a partir d'una tauleta de dibuix gràfic, on els contorns per defecte estaven definits en format binari i amb un gruix d'un píxel, estalviant així un pre-processament a diferència de les imatges en format “.tif” o “.bmp”.

En aquest cas, la informació que defineix el contorn obtingut està emmagatzemada en un nombre concret de cel·les. Cada una d'elles conté una matriu, de dues columnes les quals són les coordenades $x(n)$ i $y(n)$ del traç i un numero concret de files que corresponen al total de punts que defineix el traç. D'aquesta manera cada cel·la conté informació d'un traç de la imatge.

7. Proves

En aquest apartat es portaran a terme diverses proves per tal de demostrar l'eficiència de la metodologia fins ara desenvolupada, com també per poder obtenir una millora en la compressió i una ampliació del camp d'aplicació.

Per demostrar l'eficiència dels mètodes aplicats en la parametrització de contorns oberts s'ha dut a terme la reconstrucció d'un contorn complex format per diversos traços com també s'ha desenvolupat una prova que permet quantificar gràfica i numèricament l'error produït en la reconstrucció dels contorns en funció del nombre de coeficients.

7.1. Compressió d'un contorn format per varis traços

Aquest contorn està format per 16 traços, els quals tots junts formen un dibuix d'una mà que correspon a una obra de l'artista Eduardo Chillida, amb el qual es pretén provar l'eficàcia de la metodologia en un contorn complex.

A diferència de la parametrització de contorns simples, en aquest cas l'aplicació extraurà la informació de cada cel·la i aplicarà la metodologia desenvolupada traç per traç. A partir dels primers coeficients es reconstruirà per cada traç, el contorn de nou.

El contorn del dibuix original està representat a la figura 7.1.1 i les seves reconstruccions a partir de 5, 10, 20 i 30 EFDs en la figura 7.1.2.

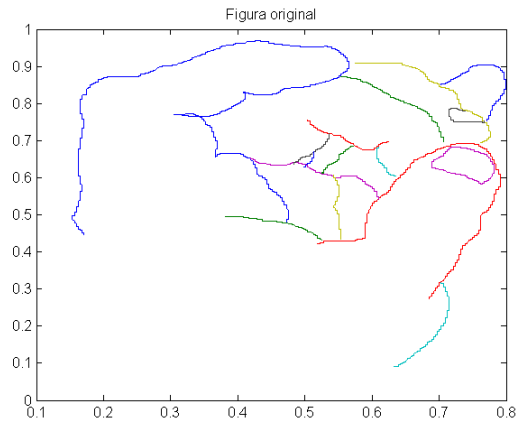


Fig. 7.1.1. Contorns que formen una mà, dibuix de l'artista Chillida.

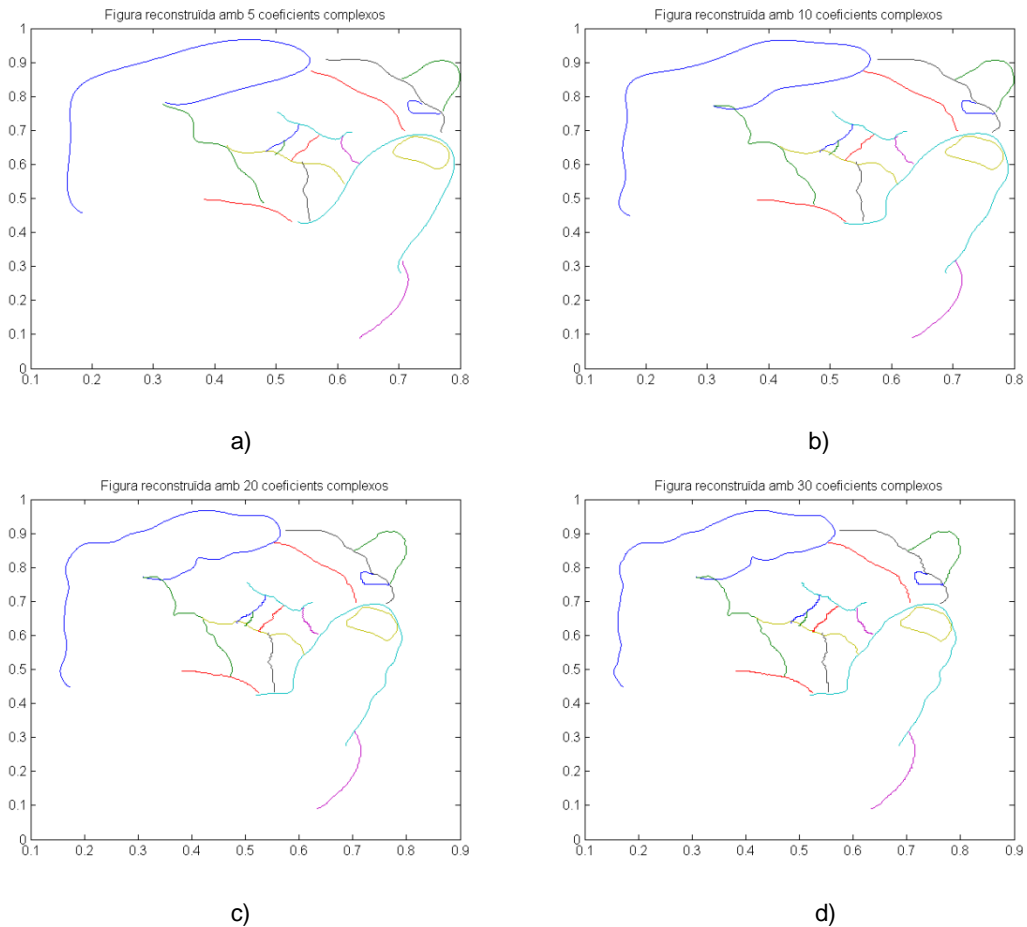


Fig. 7.1.2 Reconstrucció del contorn amb 5 (en a), 10 (en b), 20 (en c) i 30 (en d) coeficients complexos.

La reconstrucció a partir de 30 coeficients és òptima. Es manté una qualitat acceptable en la representació del contorn fins a 10 coeficients, per valors inferiors la reconstrucció no és admissible degut a una disminució de la qualitat per pèrdua de la informació essencial.

Cal tenir en compte que el programa parametriza cada traç amb el mateix nombre de coeficients, independentment de la complexitat d'aquest o de la seva llargada.

És a dir, no és el mateix reconstruir amb 20 coeficients un traç format per 400 punts originals, que un que en conté tan sols 100, sent el de 400 punts el que es veu amb una pèrdua més important d'informació.

7.2. Estudi traç a traç

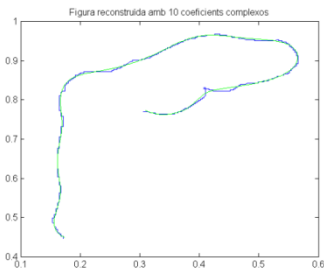
En l'apartat anterior la reconstrucció del contorn global de la mà s'ha parametrizat traç per traç, on tots els traços s'han reconstruït amb el mateix nombre de coeficients.

No obstant, cada traç que defineix una part del contorn global té una morfologia i longitud pròpia. En conseqüència, en aquest apartat es parametriza cada traç amb un nombre diferent de coeficients, per tal d'obtenir una millora en la compressió individual de cada traç i conseqüentment una major compressió del contorn global.

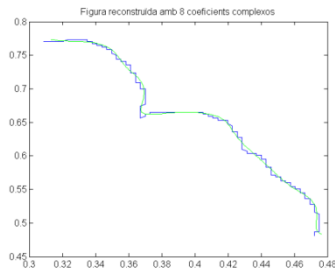
Per tal de determinar el nombre de coeficients amb que es parametritzarà cada traç, en aquest apartat s'avalua la influència de la longitud i de la morfologia pròpia de cada traç.

En la figura 7.2.1 es representa per separat cada traç amb el mínim nombre de coeficients possibles, sempre mantenint una relació acceptable entre la qualitat i el nombre de coeficients en funció de les característiques del traç. A tall d'exemple,

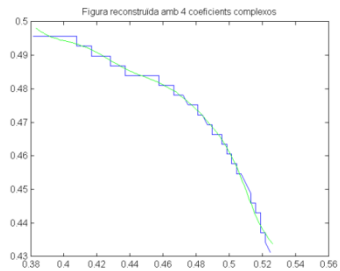
la subfigura 7.2.1.a podrà ser reconstruïda amb un nombre mínim de 10 coeficients, obtenint una reconstrucció òptima, mentre que la subfigura 7.2.1.c amb tant sols un mínim de 4 coeficients s'obtidran uns resultats de la mateixa qualitat que en l'anterior.



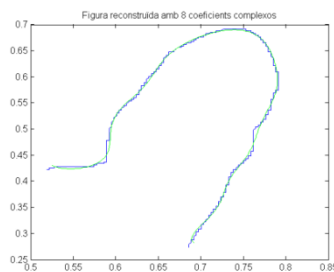
a)



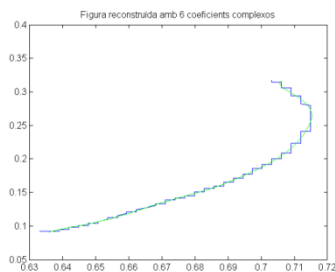
b)



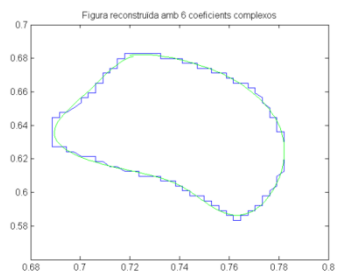
c)



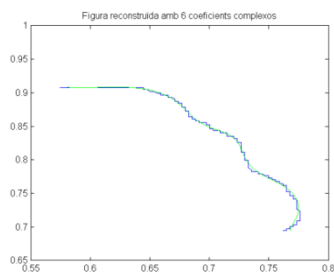
d)



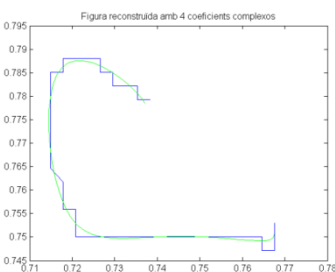
e)



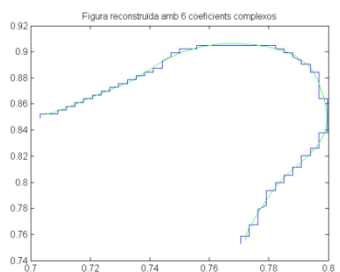
f)



g)



h)



i)

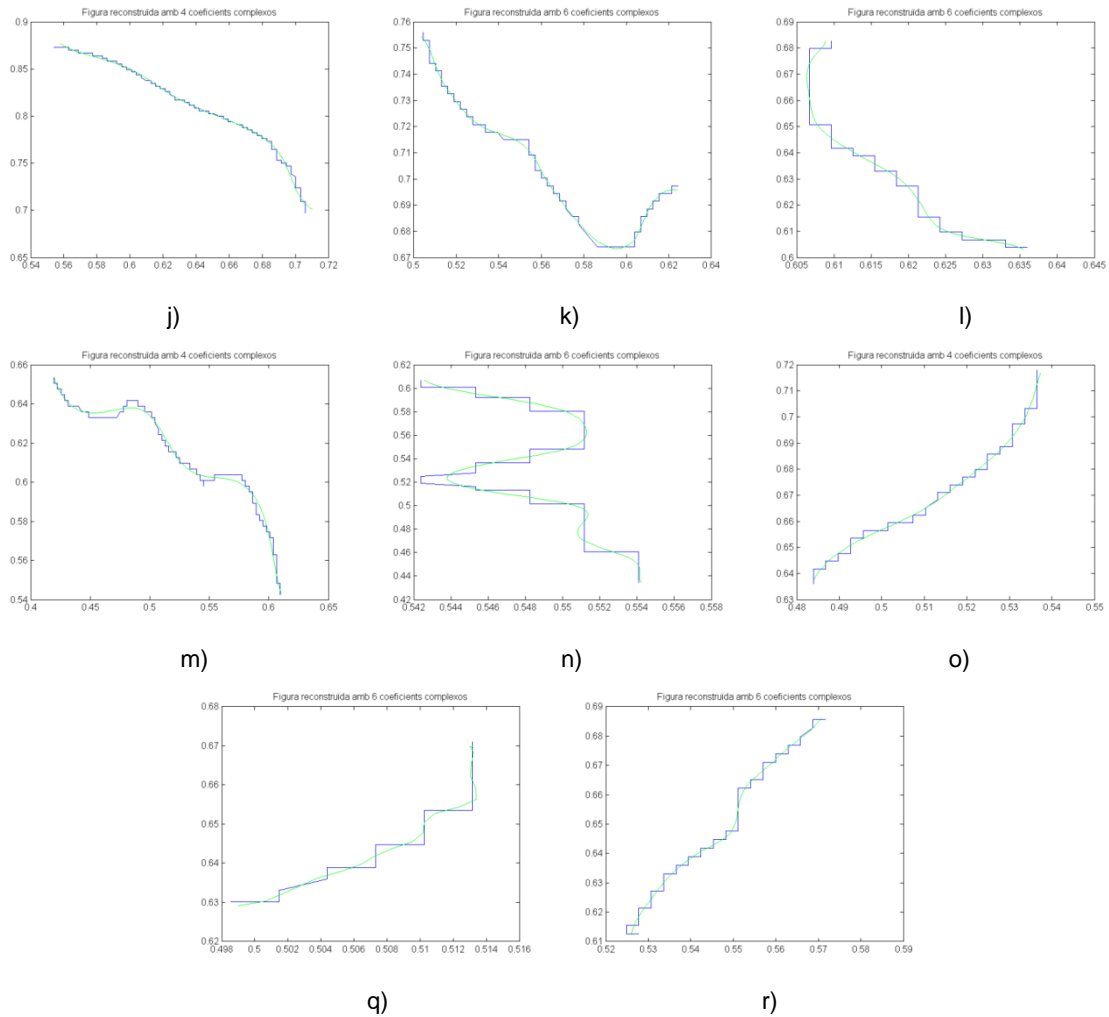


Fig. 7.2.1 Reconstrucció de cada traç amb coeficients diferents per a cada un d'ells. Amb color blau tenim els traços originals i amb color verd les reconstruccions.

A la taula 7.2.1 es mostren els resultats numèrics de les compressions aplicades a cada traç:

Traç	Nº de punts originals	Coefficients amb els que es pot representar	% de la mida respecte l'original
1	482	10	2,10%
2	161	8	5%
3	67	4	6%
4	346	8	2,30%
5	105	6	5,70%
6	125	6	4,80%
7	142	6	4,20%
8	45	4	8,80%
9	112	6	5,40%
10	108	4	3,70%
11	73	6	8,20%
12	39	6	15,40%
13	111	4	3,60%
14	68	6	8,80%
15	47	4	8,50%
16	20	6	30%
17	42	6	14,20%
Mitjanes	123,12	5,88	8%

Taula 7.3.1 Resultats de la compressió del dibuix, traç a traç

La compressió aconseguida pel contorn global és elevada. Els resultats mostren que el nombre de coeficients implicats en la reconstrucció varia en funció de la longitud del traç reconstruït. No obstant, també revelen que la complexitat morfològica del contorn té un major efecte en la variació del nombre de coeficients respecte el que exerceix la longitud del traç. D'aquesta manera es determina que la morfologia del contorn és més rellevant en la compressió d'un contorn que no la longitud.

La compressió de cada traç amb el nombre de coeficients determinat en funció de la longitud d'aquest, no difereix gaire respecte la compressió duta a terme traç a traç aplicant el mateix nombre de coeficients a cada un d'ells. Per tant, la compressió en funció la longitud del traç pràcticament no aportarà un estalvi de paràmetres. En canvi, la parametrització de cada traç en funció de la seva morfologia pot comportar un estalvi de paràmetres en la reconstrucció global del contorn.

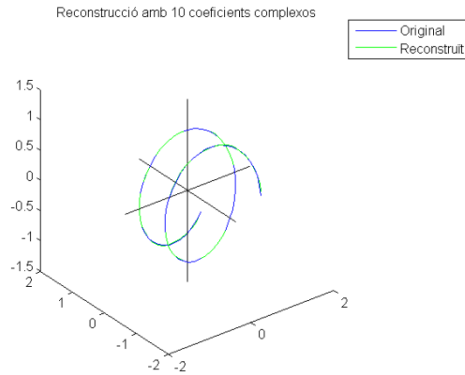
7.3. Ampliació del camp d'aplicació

Els resultats obtinguts en els apartats anteriors han demostrat que la metodologia desenvolupada per parametritzar contorns oberts és d'una elevada eficiència. En conseqüència, en aquest apartat, s'ha decidit ampliar l'aplicació d'aquesta metodologia en altres formes de contorns oberts, com són els contorns oberts en tres dimensions o en un fragment d'àudio.

7.3.1. Prova de parametrització d'un contorn obert en 3D

Un contorn obert en 3D ve representat per uns descriptors $x(n)$ i $y(n)$ igual que tots els contorns analitzats fins ara. L'única diferència és que un contorn en 3D ve definit per una tercera component, la que ve donada per l'eix z. D'aquesta manera, els descriptors necessaris per parametritzar un contorn seran $x(n)$, $y(n)$ i $z(n)$.

Tal i com es pot apreciar en la figura 7.3.1.1 després d'aplicar la metodologia desenvolupada, els resultats mostren que la reconstrucció no difereix de la d'un contorn en 2D.



7.3.1.1 Fig. Reconstrucció d'un contorn en 3D.

7.3.2. Prova de parametrització d'un fragment d'àudio

Un fragment de so es pot descriure com una senyal continua que pren diferents valors al llarg del temps. Aquest no difereix de qualsevol seqüència que descriu un contorn obert.

Les seqüències de valors que descriuen contorns oberts, incloent la que descriu un fragment de so, un cop digitalitzades passen de ser contínues a discretes, de manera que $x(t)$ esdevé $x(n)$, on x és el senyal que varia en el temps.

En aquest apartat s'analitza un fragment breu d'àudio per tal de poder-lo representar amb els EFDs tal i com s'ha dut a terme amb els contorns analitzats fins ara.

A la figura 7.3.2.1 es pot observar la seqüència original del fragment d'àudio estudiat mentre que a la figura 7.3.2.2 es mostra el final del fragment de so ampliat i rotat per poder aplicar-hi la FFT.

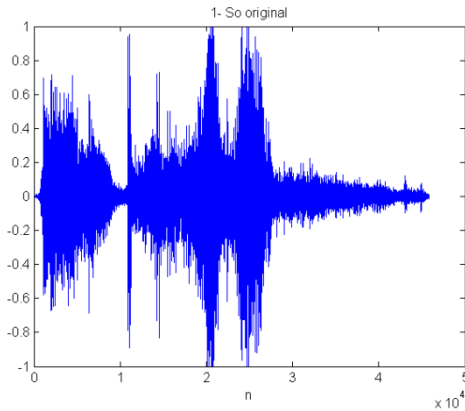


Fig. 7.3.2.1 Fragment de so original

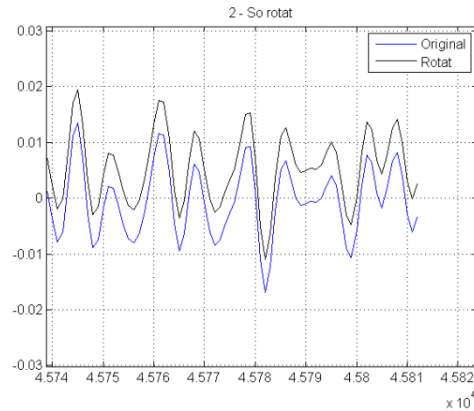


Fig. 7.3.2.2 Rotació del fragment de so.

A continuació les figures 7.3.2.3 i 7.3.2.4 mostren la reconstrucció de la seqüència i l'aspecte de la reconstrucció en detall, respectivament.

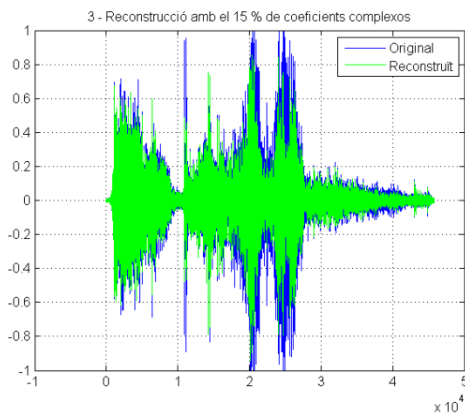


Fig. 7.3.2.3 Fragment d'àudio ja reconstruït.

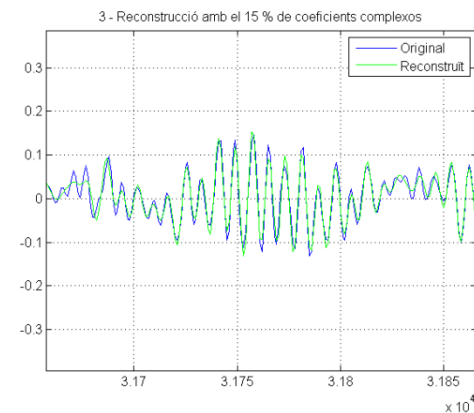


Fig. 7.3.2.4 Detall del so reconstruït.

Els resultats han mostrat que amb un 15% o inclús amb un tan per cent menor de les mostres, la qualitat obtinguda en la reconstrucció d'un fragment ha estat acceptable, equiparant-se a la que es podria obtenir a través d'un so reproduït per mitjà d'un telèfon mòbil o amb el reconeixement de caràcters per un programa especialitzat.

Així doncs, arran de les proves efectuades es pot determinar que el so es pot comprimir amb la mateixa eficiència que un contorn obert provinent d'una imatge.

A més a més, cal destacar que en contorns oberts corresponents a un fragment de so, la FFT només s'aplica per una variable ja que aquests venen descrits per una sola seqüència. D'altra banda aquells fragments que comencen i acaben en silenci se'ls hi pot aplicar la FFT directament ja que no els hi cal aplicar la rotació perquè el punts d'inici i final són els mateixos (de valor 0).

7.4. Estudi dels errors en la reconstrucció

L'objectiu d'aquest apartat consisteix en quantificar l'error produït en la reconstrucció d'un contorn complex a partir de cada un dels seus traços definits amb un nombre diferent de coeficients.

Per dur-ho a terme s'analitzaran diverses signatures com a contorns oberts complexes que són.

L'error en la reconstrucció de cada seqüència serà calculat amb les equacions (7.4.1) i (7.4.2).

$$error_x = x_{original} - x_{truncada} \quad \text{Equació (7.4.1)}$$

$$error_y = y_{original} - y_{truncada} \quad \text{Equació (7.4.2)}$$

En aquesta prova també s'avaluarà, mitjançant una gràfica, l'afectació de l'error total en vers el nombre de coeficients de la reconstrucció. L'error total s'obté a partir de l'equació (7.7.4) on abans amb l'equació (7.7.3) s'haurà calculat el mòdul de l'error de cada punt.

$$error = \sqrt{error_x^2 + error_y^2} \quad \text{Equació (7.4.3)}$$

$$error_{total} = \frac{1}{n} \sum_n^N error \quad \text{Equació (7.4.4)}$$

En la figura 7.4.1 es mostren els traços d'una signatura parametritzada amb 10 coeficients, mentre que en la figura 7.4.5 es pot apreciar el contorn global d'aquesta. Per tal de quantificar l'error produït en la reconstrucció de la seqüència $x(n)$ i $y(n)$ pertanyen a cada traç, s'han representat els errors corresponents en les figures 7.4.2, 7.4.3 i 7.4.4.

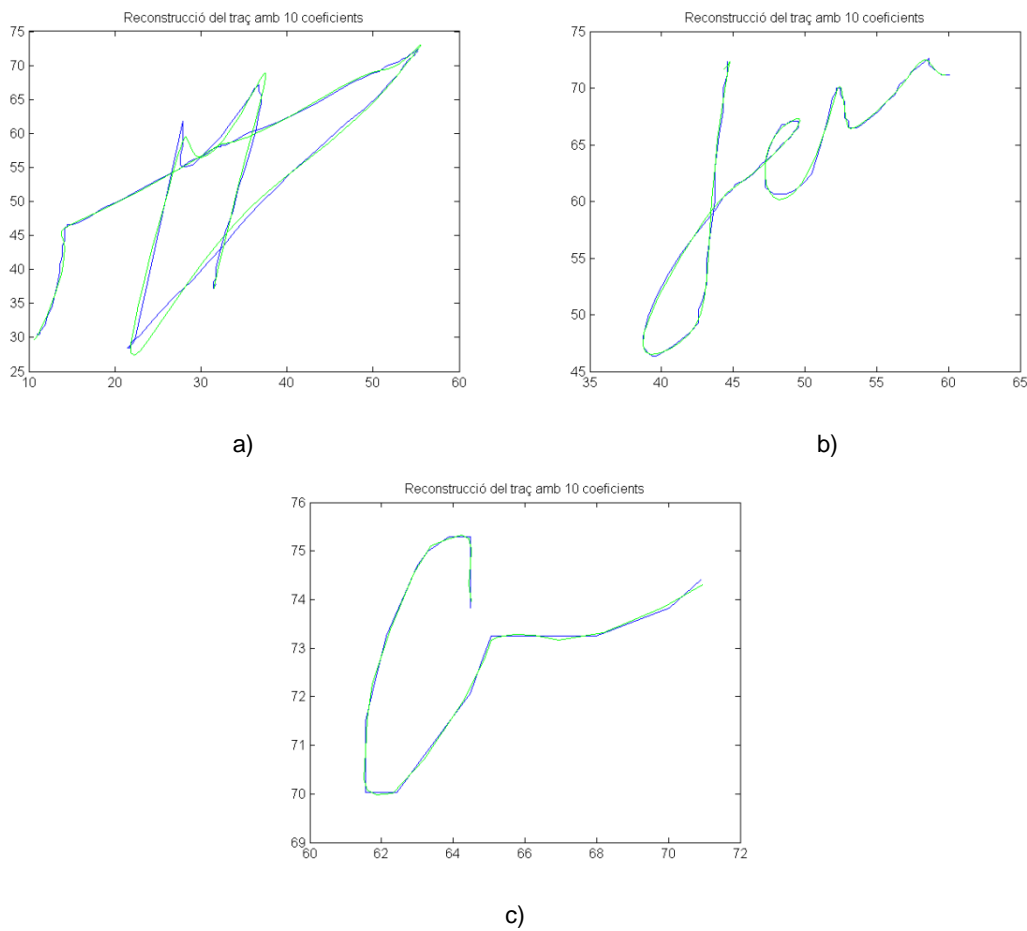


Fig. 7.4.1 Reconstrucció amb 10 coeficients dels tres traços que formen tota la signatura.

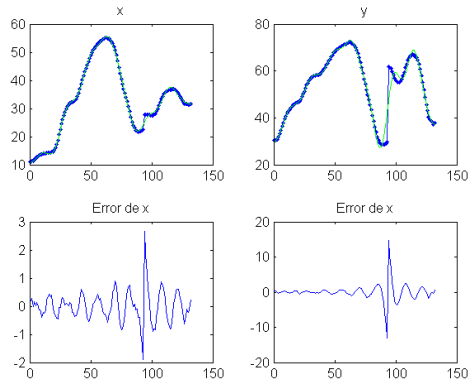


Fig. 7.4.2 Error en la reconstrucció del traç 1.

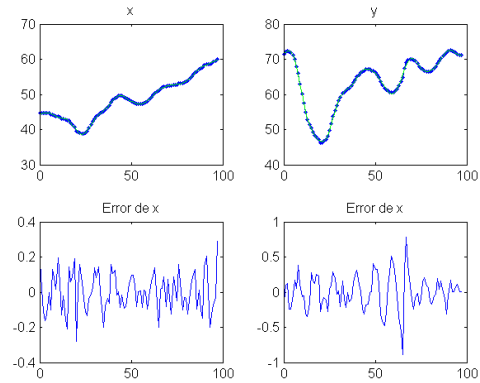


Fig. 7.4.3 Error en la reconstrucció del primer traç 2.

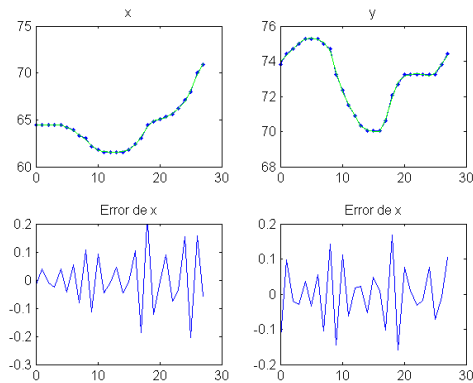


Fig. 7.4.4 Error en la reconstrucció del traç 3.

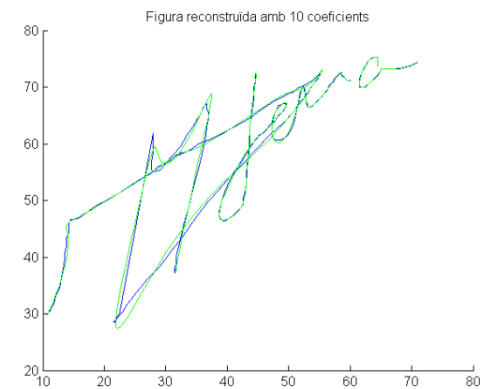


Fig. 7.4.5 Representació de la signatura completa.

A continuació amb la finalitat de disminuir l'error en la reconstrucció, es parametriza la mateixa signatura que en el cas anterior, però incrementant el nombre de coeficients a 15. En la figura 7.4.6 es mostra una representació gràfica de diferents traços del contorn mentre que a la figura 7.4.10 es representa el contorn global de la signatura. Els errors han estat representats en les figures 7.4.7, 7.4.8 i 7.4.9.

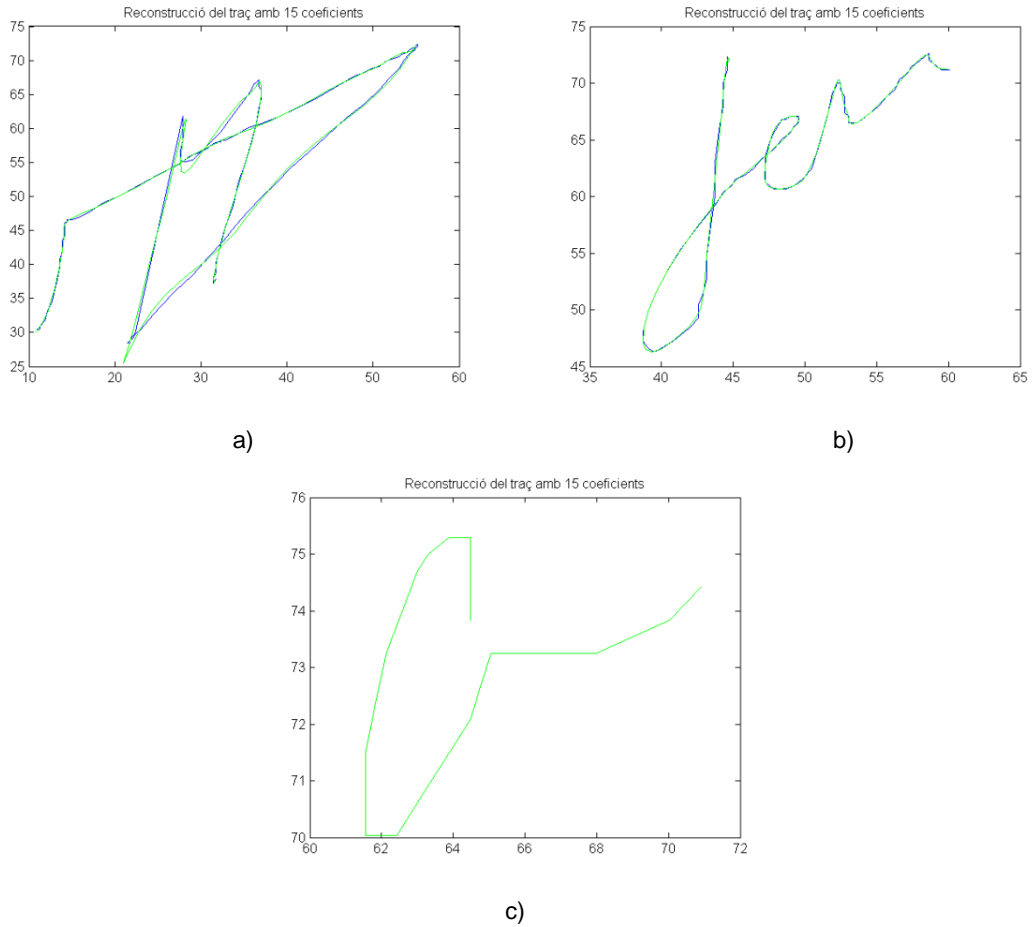


Fig. 7.4.6 Reconstrucció amb 15 coeficients dels res traços que formen tota la signatura.

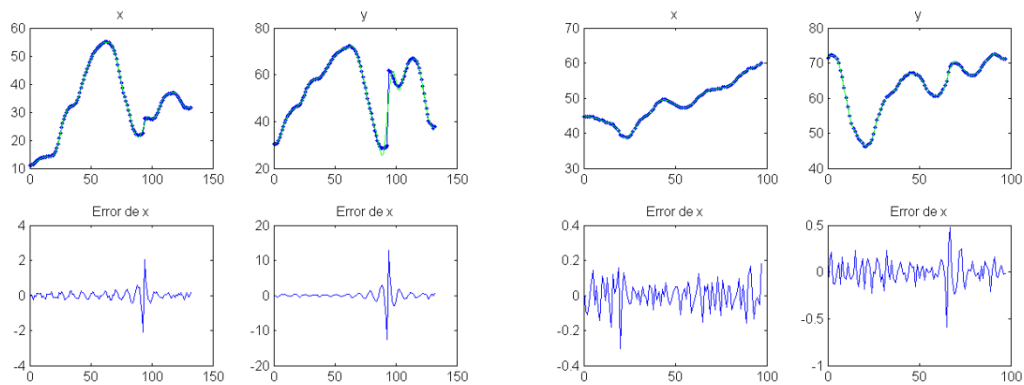


Fig. 7.4.7 Error en la reconstrucció del traç 1.

Fig. 7.4.8 Error en la reconstrucció del traç 2.

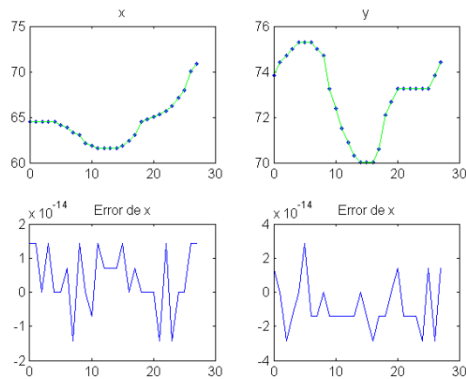


Fig. 7.4.9 Error en la reconstrucció del traç 3

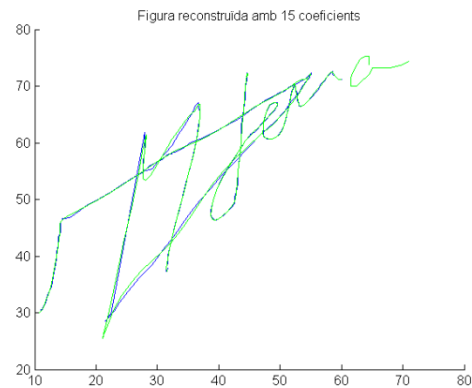
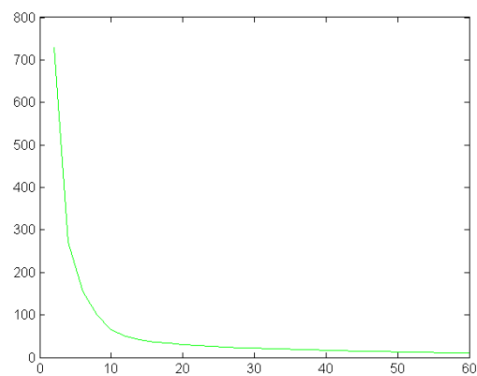
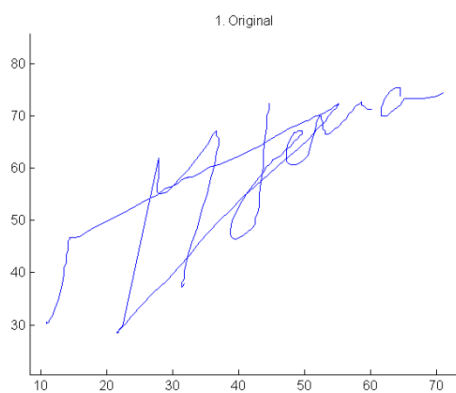


Fig. 7.4.10 Representació de la signatura completa.

Els resultats obtinguts mostren que l'error decreix notablement amb tant sols un increment d'un terç en el nombre de coeficients utilitzats en la parametrització.

A posteriori de la quantificació dels errors per seqüència, es procedirà a analitzar la variació de l'error total en la reconstrucció de cada signatura amb un nombre diferent de coeficients, en un rang de 2 a 60 coeficients complexos.



a)

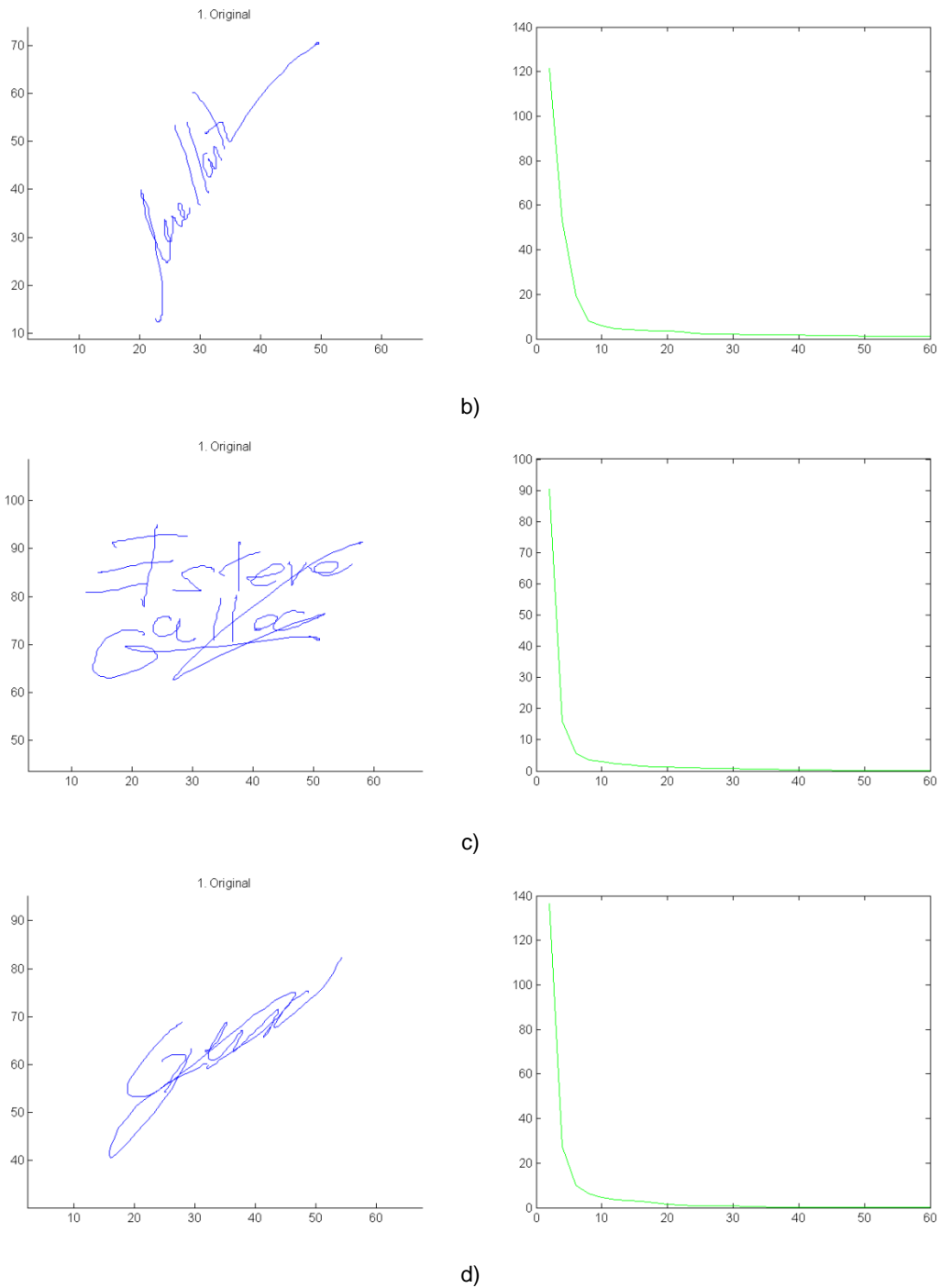


Figura 7.4.11 Evolució de l'error en la representació de tres signatures, en funció del nombre de coeficients complexos amb que s'expressen.

En totes les signatures parametritzades s'observa que l'error total disminueix ràpidament al afegir-hi els primers coeficients. En concret, en un rang de 2 a 10 coeficients, s'observa un decreixement notable de l'error i s'assoleix un error pràcticament zero per una representació amb 20 coeficients complexos.

No obstant, la signatura representada en la figura 7.4.11.a, a diferència de les altres, s'observa que l'error decreix a partir d'un nombre de coeficients superior (a partir de 50). Aquest fet, es considera que es degut a la morfologia punxeguda de la signatura, ja que la presència d'arestes comporta que siguin necessaris un major nombre de coeficients per poder-la descriure amb exactitud.

8. Conclusions i línies de futur.

8.1. Conclusions

La parametrització de contorns oberts aplicant la Transformada de Fourier s'ha aconseguit mitjançant la rotació de les seqüències $x(n)$ i $y(n)$. D'aquesta manera les seqüències estaran preparades per aplicar-hi la FFT i parametritzar el contorn amb la mateixa eficiència com si es tractes d'un contorn tancat, assolint així l'objectiu principal d'aquest projecte.

Els nombre de coeficients en que es reconstrueix un contorn obert influeix en la qualitat de la reconstrucció. Un nombre baix de coeficients permet una bona representació. Aquest comportament es degut a que la informació del contorn ve definida pel valor dels primers coeficients.

Els nous EFDs obtinguts a partir de l'aplicació de la FFT s'han mostrat variables davant la rotació del contorn parametritzat. Contràriament davant de la translació d'un contorn, els nous EFDs esdevenen invariables. Finalment pel que fa al canvi d'escala, aquests no són invariants però si que guarden la proporció.

Així doncs la fidelitat de la reconstrucció d'un contorn obert no depèn de l'angle (rotació), com tampoc de la seva posició en l'espai (translació) ni de la seva mida (canvi d'escala), sinó que ve determinada per la complexitat morfològica del contorn.

Els descriptors de baixa complexitat n_r poden ser ignorats en la reconstrucció del contorn. S'ha demostrat que aquests no influeixen en la representació del contorn, ja que l'error es inapreciable tan per la representació amb les n rotades com amb les n originals.

Amb la metodologia desenvolupada s'ha aconseguit la parametrització de contorns oberts definits per seqüències $x(n)$ i $y(n)$ i a partir d'aquí s'ha ampliat el camp d'aplicació d'aquesta, parametritzant contorns oberts definits per seqüències $x(n)$,

$y(n)$ i $z(n)$ en el cas dels contorns en 3D, com també per seqüències $x(n)$ en el cas d'un fragment d'àudio. No obstant la compressió de l'àudio està molt estudiat i no és un objectiu de pes en aquest projecte.

L'obtenció dels errors ha permès comprovar numèricament l'error en la reconstrucció dels contorns oberts tan pel que fa a l'error en les seqüències com l'error general d'un contorn obert complex. A partir dels valors obtinguts en els errors permetrà saber el nombre de EFDs amb els quals parametritzar un contorn per obtenir una qualitat determinada.

Com a conclusió final es determina que la parametrització de contorns oberts aplicant la FFT ha permès expressar els contorns sense pèrdues significatives d'informació, amb un estalvi de paràmetres de fins el 92%.

8.2. Línies de futur

En aquest apartat es proposen diverses línies de futur aplicant la metodologia desenvolupada en aquest projecte.

Una possible línia de futur és el reconeixement de signatures. Com a contorns oberts complexos que són es podria aplicar la metodologia desenvolupada per obtenir els EFDs que parametritzen una signatura i posteriorment poder-la reconèixer a través de la comparació amb les signatures registrades en una base de dades.

Una altra proposta és el desenvolupament d'una aplicació basada en la parametrització amb FFT, que permeti reconèixer contorns oberts de formes biològiques, permetent d'aquesta manera una ampliació i millora en els estudis morfomètrics. Per exemple desenvolupar una aplicació que permeti la identificació del traç a practicar per un cirurgià en una operació, o bé una altra per facilitar la

identificació i classificació de mol·luscs a partir de les sutures que presenten en la closca.

Els EFDs poden ser modificats per ser invariants respecte a la mida, la rotació, o el punt de partida, però en els resultats obtinguts en aquest treball els EFDs provinents de la FFT aplicada s'han mostrat variants pel que fa a la rotació i pel canvi d'escala. Per tant, una possible futura línia de treball consistiria en modificar els EFDs perquè esdevinguin invariables davant la rotació i canvi d'escala.

La metodologia desenvolupada per parametritzar contorns oberts aplicant la FFT presenta una gran diversitat de camps d'aplicació, permeten així diverses línies de futur.

9. Bibliografia

ALLEN, Emily G. "New approaches to Fourier analysis of ammonoid sutures and other complex, open curves". *Paleobiology*, 32 (2006): 299-315.

BRACEWELL, R. N. "The Fourier Transform". *Scientific American*, 260 (1989): 62-69.

IWATA, H., S. NIIKURA, S. MATSUURA, Y. TAKANO AND Y. UKAI. "Interaction between genetic effects and soil type in diallel analysis of root shape and size of Japanese radish (*Raphanus sativus* L.)". *Breeding Science* 54 (2004): 313-318.

KUHL, F.P., GIARDINA, C.R. "Elliptic Fourier features of a closed contour". *Comput. Graph. Image Process*, 18 (1982): 236–258.

LESTREL, P.E. "Fourier Descriptors and their Application in Biology". *Cambridge University Press*, 1997: 466.

NIXON, M., AGUADO, A. "Feature Extraction and Image Processing (2 Ed.)" *Academic Press*, (2008).

REIG-BOLANO, R., MARTÍ-PUIG, P., GALLEGO, E., MASFERRER, G., LOMBARTE, A., FERRER-ARNAU, L., PARISI-BARADAD, V. "Feature selection for analyzing and retrieving fish otoliths using Elliptic Fourier Descriptors of shapes". *Next Generation Web Services Practices (NWeSP), 2011 7th International Conference on*, 2011: 290-295.

ROHLF FJ, ARCHIE JW. "A comparison of Fourier methods for the description of wing shape in mosquitoes (*Ritiera culicidae*)". *Syst Zool*, 33 (1984): 302-317.

HERVELLA, Samira. Editor de imágenes basado en regiones. Aplicación en entorno Matlab. 2006. <http://es.scribd.com/doc/57395430/6/ALGORITMO-DE-THINNING> (Consulta: 21 de Juliol de 2012)

TORT, A. "Elliptical Fourier Functions as a Morphological Descriptor of the Genus Stenosarina (Brachiopoda, Terebratulida, New Caledonia)". *Mathematical Geology*, 35 (2003): 873-885.

TRACEY, S.R., LYLE, J.M., DUHAMELB, G. "Application of elliptical Fourier analysis of otolith form as a tool for stock identification". *Fisheries Research*, 77 (2006):138–147.

10. Annex

L'annex conté el codi dels programes principals desenvolupats pel projecte. Cal destacar que els programes utilitzats per dur a terme proves puntuals no han estat inclosos, ja que no s'han considerat necessari mostrar-los.

Aplicació per parametritzar contorns provinents d'imatges digitalitzades en format ".tif" o ".bmp":

```
close all
clear all
ncoef=10; % Nombre de coeficients amb els que es vol representar el
contorn

%S'obre l'arxiu
I=imread ('prova4.tif')
figure(1)
imshow (I)

%Es converteix en blanc i negre
level = graythresh(I)
bw = im2bw(I,level)
I=bw
figure(2), imshow(I)
I2=abs(I-1)

%Obtenció del Contorn
I = bwmorph(I2, 'thin', inf);
figure(3), imshow (I)
impixelregion

%Obtenció dels vectors del contorn I{x}=(x, y)
I=bwboundaries (I)

z=size(I);z=z(1)
c=4

for y=1:z
    contorn=I{y}

    mida=size(contorn)
    mida=mida(1)
    mida=(mida+1)/2
    cont=[]
    for n=1:mida
        a=contorn(n,:)
        cont=[cont;a]
```

```

    n=n+1
end
contorn=cont
hold on

%*****
% A partir d'aquí ja es té la figura vectoritzada; es procedeix a
% parametritzar-la.
%*****
N=size (contorn)
N=N(1)
n=0:1:N-1
contorn=contorn'
x2=contorn(2,:); y2=-contorn(1,:)

% Representació de la corba
figure(c)
subplot(2,1,1); plot(x2,y2,'.b'); title('1-Original');
subplot(4,1,3); plot(n,x2,'b',n,x2,'.b'); title('x'); xlabel('n');
subplot(4,1,4); plot(n,y2,'b',n,y2,'.b'); title('y'); xlabel('n');

% Càlcul dels angles de la rotació
Ax=atan((x2(N)-x2(1))/(N-1));
Ax_g=180*Ax/pi
Ay=atan((y2(N)-y2(1))/(N-1));
Ay_g=180*Ay/pi

Rx=[cos(Ax) -sin(Ax); sin(Ax) cos(Ax)]; % Matriu de rotació de les x
Ry=[cos(Ay) -sin(Ay); sin(Ay) cos(Ay)]; % Matriu de rotació de les y
iRx=Rx'; % Matriu de rotació inversa de les x
iRy=Ry'; % Matriu de rotació inversa de les y

% Transformació de la X
u=Rx*[x2; n]; x2_r=u(1,:); nx_r=u(2,:);
% Transformació de la Y
u=Ry*[y2; n]; y2_r=u(1,:); ny_r=u(2,:);

% Representació de la rotació
figure(c+1)
subplot(2,1,1); plot(n,x2,'.b',nx_r,x2_r,'.k'); grid; ylabel('x');
title('2-Rotacions');
legend('Original','Rotada')
subplot(2,1,2); plot(n,y2,'.b',ny_r,y2_r,'.k'); grid; ylabel('y')
legend('Original','Rotada')

% Descomposició EFD
Xr=fft(x2_r); % Càlcul de la FFT de la x2_r rotada
Yr=fft(y2_r); % Càlcul la FFT de la y2_r rotada

```

```

% Vectors amb els coeficients truncats
Xr_trun=Xr; Xr_trun(nccoef:N-nccoef+1)=0;
Yr_trun=Yr; Yr_trun(nccoef:N-nccoef+1)=0;

% Reconstrucció
x_r_trun=real(iff(Xr_trun));
y_r_trun=real(iff(Yr_trun));

% Desfer Rotació
u=iRx*[x_r_trun; nx_r];
x_trun=u(1,:);
u=iRy*[y_r_trun; ny_r];
y_trun=u(1,:);

% Representació de la rotació
figure(c+2)
str = ['3-Reconstruccio de ' num2str(nccoef) ' coeficients complexos'];
subplot(2,1,1); plot(n,x2,'.b',nx_r,x_trun,'.g'); grid; ylabel('x');
title(str);
legend('Original', 'Rotació inversa')
subplot(2,1,2); plot(n,y2,'.b',ny_r,y_trun,'.g'); grid; ylabel('y')
legend('Original', 'Rotació inversa')

b_trun=[x_trun; y_trun]
b_trun=b_trun'
dades_trun{y}=b_trun

c=c+3
end

figure(c)
hold on
srt= [num2str(c) '. Figura reconstruida amb ' num2str(nccoef) '
coeficients']
title(srt)
for i=1:z
    a=I{i}
    x=a(:,2); y=-a(:,1)
    plot(x,y)

    b_trun=dades_trun{i}
    xb_trun=b_trun(:,1);yb_trun=b_trun(:,2)
    plot(xb_trun,yb_trun,'g')
    legend('Original', 'Reconstruït')
    i=i+1
end
hold off

```

Aplicació per parametritzar contorns provinents d'imatges digitalitzades en format ".mat":

```

close all
clear all
load firma %Nom de l'arxiu a processar
dades= firma
ncoef=15; %Nombre de coeficients amb els que volem representar el
contorn

z=size(dades); z=z(2)

figure(1); title('1. Original')
hold on
for i=1:z
    a=dades{i}
    x=a(:,1); y=a(:,2)
    plot (x,y)
    i=i+1
end
hold off

c=2

for i=1:z
    a=dades{i}
    xi=a(:,1); yi=a(:,2)
    N=size (xi)
    N=N(1)
    n=0:1:N-1

    % Càlcul dels angles de la rotació
    Ax=atan((xi(N)-xi(1))/(N-1));
    Ax_g=180*Ax/pi
    Ay=atan((yi(N)-yi(1))/(N-1));
    Ay_g=180*Ay/pi

    Rx=[cos(Ax) -sin(Ax); sin(Ax) cos(Ax)]; % Matriu de rotació de les x
    Ry=[cos(Ay) -sin(Ay); sin(Ay) cos(Ay)]; % Matriu de rotació de les y
    iRx=Rx'; % Matriu de rotació inversa de les x
    iRy=Ry'; % Matriu de rotació inversa de les y

    xi=xi'
    yi=yi'

    % Transformació de la X
    u=Rx*[xi; n]; xi_r=u(1,:); nx_r=u(2,:);

```

```

% Transformació de la Y
u=Ry*[yi; n]; yi_r=u(1,:); ny_r=u(2,:);

% Descomposició EFD
Xr=fft(xi_r); % Càlcul de la FFT de la x2_r rotada
Yr=fft(yi_r); % Càlcul de la FFT de la y2_r rotada

% Vectors amb els coeficients truncats
Xr_trun=Xr; Xr_trun(nccoef:N-nccoef+1)=0;
Yr_trun=Yr; Yr_trun(nccoef:N-nccoef+1)=0;

% Reconstrucció
x_r_trun=real(ifft(Xr_trun));
y_r_trun=real(ifft(Yr_trun));

% Desfer rotació
u=iRx*[x_r_trun; nx_r];
x_truni=u(1,:);
u=iRy*[y_r_trun; ny_r];
y_truni=u(1,:);

% Representació de la corba
figure(c)
str = [num2str(c) ' . Reconstruccio del traç amb ' num2str(nccoef) '
coefficients complexes'];
plot(xi,yi,'b',x_truni,y_truni,'g'); title(str);

b_trun=[x_truni; y_truni]
b_trun=b_trun'
dades_trun{i}=b_trun

ex=(xi-x_truni)
ey=(yi-y_truni)
e=(ex).^2+(ey).^2
e=sqrt(e)

% Representació de l'error
str = [num2str(c+1) ' . Error quadràtic del traç amb ' num2str(nccoef) '
' num2str(nccoef) ' coefficients complexes'];
figure(c+1);title(str)
subplot(2,2,1);plot(n,xi,'b',n,xi,'b.',n,x_truni,'g');title('x')
subplot(2,2,2);plot(n,yi,'b',n,yi,'b.',n,y_truni,'g');title('y')
subplot(2,2,3);plot(n,ex,'b');title('Error de x')
subplot(2,2,4);plot(n,ey,'b');title('Error de x')

b_trun=[x_truni; y_truni]
b_trun=b_trun'
dades_trun{i}=b_trun
r{i}=e

```

```

    i=i+1
    c=c+2
end

figure (c)
hold on
srt= [num2str(c) '. Figura reconstruïda amb ' num2str(nccoef) '
coeficients']
title(srt)
for i=1:z
    a=dades{i}
    x=a(:,1); y=a(:,2)
    plot (x,y)

    b_trun=dades_trun{i}
    xb_trun=b_trun(:,1);yb_trun=b_trun(:,2)
    plot(xb_trun,yb_trun,'g')
    i=i+1
end
hold off

```

Aplicació per obtenir l'error de la reconstrucció a partir d'un nombre diferent de coeficients:

```

clear all
close all

nccoef= 2 %Numero de coeficients inicials
escala= 2 %Escalat de la gràfica
limit = 60 %Límit fins el que es vol mirar
load firma
dades = firma

z=size(dades); z=z(2)

figure(1); title('1. Original')
hold on
for i=1:z
    a=dades{i}
    x=a(:,1); y=a(:,2)
    plot (x,y)
    i=i+1
end
hold off

```

```

v=ncoef
w=1

while ncoef<=limit

for i=1:z
a=dades{i}
xi=a(:,1); yi=a(:,2)
N=size (xi)
N=N(1)    n=0:1:N-1

% Càlcul dels angles de la rotació
Ax=atan((xi(N)-xi(1))/(N-1));
Ax_g=180*Ax/pi
Ay=atan((yi(N)-yi(1))/(N-1));
Ay_g=180*Ay/pi

Rx=[cos(Ax) -sin(Ax); sin(Ax) cos(Ax)]; % Matriu de rotació de les x
Ry=[cos(Ay) -sin(Ay); sin(Ay) cos(Ay)]; % Matriu de rotació de les y
iRx=Rx'; % Matriu de rotació inversa de les x
iRy=Ry'; % Matriu de rotació inversa de les y

xi=xi'
yi=yi'

% Transformació de la X
u=Rx*[xi; n]; xi_r=u(1,:); nx_r=u(2,:);
% Transformació de la Y
u=Ry*[yi; n]; yi_r=u(1,:); ny_r=u(2,:);

% Descomposició EFD
Xr=fft(xi_r); % Càlcul de la FFT de la x2_r rotada
Yr=fft(yi_r); % Càlcul de la FFT de la y2_r rotada

% Vectors amb els coeficients truncats
Xr_trun=Xr; Xr_trun(ncoef:N-ncoef+1)=0;
Yr_trun=Yr; Yr_trun(ncoef:N-ncoef+1)=0;

% Reconstrucció
x_r_trun=real(ifft(Xr_trun));
y_r_trun=real(ifft(Yr_trun));

% Desfer rotació
u=iRx*[x_r_trun; nx_r];
x_trun=u(1,:);
u=iRy*[y_r_trun; ny_r];

```

```

y_truni=u(1,:);

b_trun=[x_truni; y_truni]
b_trun=b_trun'
dades_trun{i}=b_trun

ex=(xi-x_truni)
ey=(yi-y_truni)
e=(ex).^2+(ey).^2
e=sqrt (e)

b_trun=[x_truni; y_truni]
b_trun=b_trun'
dades_trun{i}=b_trun
r{i}=e

i=i+1

end

% Càlcul de l'error total
error=0
for i=1:z
    er=r{i}
    t=size(er);t=t(2)
    for n=1:t
        error=error+er(n)
        n=n+1
    end
    i=i+1
end

errorquadratic(w)=(error/(z))
ncoef=ncoef+escala
w=w+1
end

n=v:escala:limit
figure(2); title('2. Error quadràtic per els diferents valors de
coeficients en la reconstrucció')
plot (n,errorquadratic,'g')

```

Aplicació per parametritzar contorns oberts en 3D:

```

% Pintar envoltant
c=1;

```

```

% Una corba
y=-1:0.02:0.5;
x=-1*c*sin(2*pi*y/0.8);
z=c*cos(2*pi*y/0.8);

figure(1)
plot3(x,y,z,'b')
hold on

% Pintar eixos
eix_y=-1.5:0.01:1.5;
plot3(zeros(size(eix_y)),eix_y,zeros(size(eix_y)),'b')
eix_x=-1.5:0.01:1.5;
plot3(eix_x,zeros(size(eix_y)),zeros(size(eix_y)),'k')
eix_z=-1.5:0.01:1.5;
plot3(zeros(size(eix_y)),zeros(size(eix_y)),eix_z,'k')
axis square;
hold off

N= size(x); N=N(2)
n=0:1:N-1

ncoef=10; % Nombre de coeficients amb els que es representa el contorn

figure(2);title('Corbes')
subplot(3,1,1); plot(n,x,'b',n,x,'.b'); title('x'); xlabel('n');
subplot(3,1,2); plot(n,y,'b',n,y,'.b'); title('y'); xlabel('n');
subplot(3,1,3); plot(n,z,'b',n,z,'.b'); title('z'); xlabel('n');

% Càlcul dels angles de la rotació
Ax=atan((x(N)-x(1))/(N-1)); % En radiants per la x
Ax_g=180*Ax/pi
Ay=atan((y(N)-y(1))/(N-1)); % En radiants per la y
Ay_g=180*Ay/pi
Az=atan((z(N)-z(1))/(N-1)); % En radiants per la y
Az_g=180*Az/pi

Rx=[cos(Ax) -sin(Ax); sin(Ax) cos(Ax)]; % Matriu de rotació de les x
Ry=[cos(Ay) -sin(Ay); sin(Ay) cos(Ay)]; % Matriu de rotació de les y
Rz=[cos(Az) -sin(Az); sin(Az) cos(Az)]; % Matriu de rotació de les z
iRx=Rx'; % Matriu de rotació inversa de les x
iRy=Ry'; % Matriu de rotació inversa de les y
iRz=Rz'; % Matriu de rotació inversa de les z

% Transformació de la X
u=Rx*[x; n]; x_r=u(1,:); nx_r=u(2,:);

```

```

% Transformació de la Y
u=Ry*[y; n]; y_r=u(1,:); ny_r=u(2,:);
% Transformació de la Y
u=Rz*[z; n]; z_r=u(1,:); nz_r=u(2,:);

% Representació de la rotació
figure(3)
subplot(3,1,1); plot(n,x,'b',n,x,'.b',nx_r,x_r,'.k'); title('2-
Rotacions');
subplot(3,1,2); plot(n,y,'b',n,y,'.b',ny_r,y_r,'.k');
subplot(3,1,3); plot(n,z,'b',n,z,'.b',nz_r,z_r,'.k'); xlim([0 128]);
grid;

% Descomposició EFD
Xr=fft(x_r); % Càlcul de la FFT de la x_r rotada
Yr=fft(y_r); % Càlcul de la FFT de la y_r rotada
zr=fft(z_r); % Càlcul de la FFT de la z_r rotada

% Vectors amb els coeficients truncats
Xr_trun=Xr; Xr_trun(ncoef:N-ncoef+1)=0;
Yr_trun=Yr; Yr_trun(ncoef:N-ncoef+1)=0;
zr_trun=zr; zr_trun(ncoef:N-ncoef+1)=0;

% Reconstrucció
x_r_trun=real(iff(Xr_trun));
y_r_trun=real(iff(Yr_trun));
z_r_trun=real(iff(zr_trun));

% Desfer rotació
u=iRx*[x_r_trun; nx_r];
x_trun=u(1,:);
u=iRy*[y_r_trun; ny_r];
y_trun=u(1,:);
u=iRz*[z_r_trun; nz_r];
z_trun=u(1,:);

% Representació de la rotació
figure(4)
str = ['3-Reconstruccio de ' num2str(ncoef) ' coeficients complexes'];
subplot(3,1,1); plot(n,x,'b',n,x,'.b',nx_r,x_trun,'.g'); title(str);
subplot(3,1,2); plot(n,y,'b',n,y,'.b',ny_r,y_trun,'.g');
subplot(3,1,3); plot(n,z,'b',n,z,'.b',nz_r,z_trun,'.g');

% Representació de la corba
figure(5)
str = ['4 - Reconstruccio de ' num2str(ncoef) ' coeficients
complexes'];
plot3(x,y,z,'b',x,y,z,'.b',x_trun,y_trun,z_trun,'g'); title(str);
hold on

```

```
% Pintar eixos
eix_y=-1.5:0.01:1.5;
plot3(zeros(size(eix_y)),eix_y,zeros(size(eix_y)), 'b')
eix_x=-1.5:0.01:1.5;
plot3(eix_x,zeros(size(eix_y)),zeros(size(eix_y)), 'k')
eix_z=-1.5:0.01:1.5;
plot3(zeros(size(eix_y)),zeros(size(eix_y)),eix_z, 'k')
axis square;
hold off
```

Aplicació per parametritzar una seqüència d'àudio:

```
x=wavread('sol');
sound (x,44100)

N=size (x)
n=0:1:N-1

cnt= 15 % Tan per cent en que es vol comprimir el so
ncoef=(N*cnt)/100; ncoef = ncoef(1)

% Representació de la corba
figure(1)
plot(x); xlabel('n'); title('1- So original');

% Càlcul dels angles de la rotació
x=x'
Ax=atan((x(N)-x(1))/(N-1)); % en radians per la x
Ax_g=180*Ax/pi

Rx=[cos(Ax) -sin(Ax); sin(Ax) cos(Ax)]; % Matriu de rotació de les x

iRx=Rx'; % Matriu de rotació inversa de les x

% Transformació de la X
u=Rx*[x; n]; x_r=u(1,:); nx_r=u(2,:);

% Representació de la rotació
figure(2)
plot(n,x, 'b',nx_r,x_r, 'k'); grid; title('2 - So rotat');

% Descomposició EFD
Xr=fft(x_r); % Càlcul de la FFT de la x2_r rotada

% Vectors amb els coeficients truncats
Xr_trun=Xr; Xr_trun(ncoef:N-ncoef+1)=0;
```

```
% Reconstrucció
x_r_trun=real(iff(Xr_trun));

% Desfer rotació
u=iRx*[x_r_trun; nx_r];
x_trun=u(1,:);

% Representació de la rotació
figure(3)
str = ['3 - Reconstrucció amb el ' num2str(cnt) ' % de coeficients
complexes'];
plot(n,x,'b',nx_r,x_trun,'g'); grid;
title(str);legend('Original','Reconstruit')
pause
sound (x_trun,44100) % Execució del so comprimit.
```