UVIC FACULTAT D'EDUCACIÓ, TRADUCCIÓ I CIÈNCIES HUMANES

Màster en Innovació en Didàctiques Específiques

TREBALL FINAL DE MÀSTER

ANÀLISI DE LES ESTRATÈGIES DE CÀLCUL MENTAL QUE UTILITZEN ELS ALUMNES A L'HORA DE RESOLDRE CÀLCULS DE SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓ I DIVISIÓ

Com calculen els alumnes de 6è d'Educació Primària d'una escola de la comarca d'Osona que no se'ls ha ensenyat l'Algoritme tradicional.

Presentat per:

Clara Vila i Cortés

Tutoritzat per:

Isabel Sellas i Ayats

Universitat de Vic – Universitat Central de Catalunya

Setembre 2017

AGRAÏMENTS

El Treball de Fi de Màster no hagués estat possible sense el suport de totes les persones que han estat al meu costat des del primer moment.

Agraeixo sincerament, i en primer lloc, l'ajuda i el suport incondicional de la meva tutora en aquesta recerca, Isabel Sellas, per acompanyar-me en el camí, especialment en els moments que em sentia més desorientada. Gràcies Isabel per tot el seguiment!

En segon lloc, agraeixo a l'Anna i en Toni, tutors de 6è d'Educació Primària de l'escola Quatre Vents, per interessar-se en el que volia fer, per escoltar-me, confiar en mi i ajudar-me en tot moment. També agrair a tot el personal docent i no docent de l'escola per ajudar-me a sentir-me com un d'ells. Moltes gràcies a tots!

En tercer lloc, agrair a tots els nens i nenes de 6è d'Educació Primària. Per una banda, als que no van ser escollits per realitzar el qüestionari, i per altra banda, els alumnes que el van realitzar, per la seva paciència, per mostrar-se disposats a explicar-me com resolien els càlculs plantejats i la predisposició a contestar tot el que se'ls qüestionava. Gràcies a tots per deixar que portés a terme la recerca educativa!

En quart lloc, agraeixo als meus pares, Joan i Roser per la seva tolerància, i sobretot a la meva parella, Manel, per estar sempre al meu costat, per animar-me a seguir en els moments que estava més desanimada, per fer-me somriure i sentir-me cada dia més feliç de tenir-lo al meu costat. Gràcies per interessar-vos, implicar-vos i tranquil·litzar-me en els moments que més ho necessitava. Tota la recerca ha estat possible gràcies a la vostra ajuda! Gràcies!

Finalment, agrair a totes les persones, que d'una manera o altra m'han acompanyat i ajudat durant el procés d'elaboració d'aquest Treball de Fi de Màster.

Un plaer compartir la vida amb tots ells.

RESUM

La present recerca té com a finalitat identificar com calculen mentalment nens i nenes de 6è d'Educació Primària d'una escola pública de Catalunya que no se'ls ha ensenyat, des de l'escola, l'algoritme tradicional per resoldre càlculs. Per aconseguir aquest propòsit s'ha analitzat detalladament les estratègies emprades pels alumnes a l'hora de resoldre mentalment operacions de suma, resta, multiplicació i divisió. La metodologia utilitzada ha sigut majoritàriament qualitativa tot i que també s'han analitzat dades quantitativament.
S'han obtingut dades a través de gravacions on els alumnes resolen els càlculs proposats a partir d'un qüestionari oral.
A partir dels resultats obtinguts s'ha determinat que la gran majoria dels alumnes realitzen càlculs mitjançant estratègies diverses de càlcul mental i tenen l'habilitat d'argumentar i justificar la metodologia utilitzada per resoldre'ls.

Paraules clau: estratègies de càlcul mental, Educació Primària, algoritme tradicional, càlcul mental.

ABSTRACT

The purpose of this research is to identify how primary children (11 to 12 years old), from a state school, calculate mentally not having been taught by school the traditional algorithm to resolve calculations. The strategies used by the students have been analyzed in detail while solving addition, subtraction, multiplication and division operations mentally in order to achieve the research purpose. The methodology used has been mainly qualitative although some data have also been analyzed quantitatively.
We have obtained data through recordings when the students resolved the proposed calculations from an oral questionnaire.
On the basis of the overall results, we state determinate that the vast majority of students calculate through different strategies of mental calculation and have the ability to argue and justify the methodology used to solve them.

Key Words: mental strategies, elementary school, traditional algorithm, mental calculation.

Índex de continguts

Índex de figures

1. Introducció

El treball que es desenvoluparà a continuació és el Treball Final del Màster en Innovació en Didàctiques Específiques en Matemàtiques del curs 2016-2017. Amb aquest he pretès fer una investigació per tal de comprendre com calculen els alumnes de 6è d'Educació Primària d'una escola que no se'ls ha ensenyat a calcular mitjançant l'algoritme tradicional[1].

La investigació i realització de la part pràctica del treball s'ha desenvolupat a l'escola Quatre Vents. És una escola pública d'Educació Infantil i Primària de Manlleu (Osona).

La meva investigació gira entorn a una pregunta de recerca que em vaig formular en el moment de fer la tria del tema del treball, i que he volgut respondre a través de la recerca realitzada. A partir de la recerca, he pogut respondre a la pregunta però només centrant-me en el grup concret d'estudi, sent conscient que per a poder generalitzar aquests resultats hauria de disposar d'una mostra més àmplia.

1.1 Justificació

La tria d'aquest tema va ser degut a la curiositat que tenia des de fa bastants anys en comprendre perquè la matèria de matemàtiques era reconeguda –encara avui dia– com una de les més complexes. La gran majoria dels estudiants tenen dificultats a l'hora de realitzar operacions matemàtiques, resoldre problemes, etc., i només sentir parlar de nombres, operacions i/o problemes els hi provoca un bloqueig mental o una angoixa que no els deixa avançar i/o gaudir del procés d'aprenentatge. A més, el que em crida més l'atenció és la manca d'habilitats per **calcular mentalment** quan se surt fora de l'escola ja que no saben com resoldre els càlculs perquè no disposen de paper i llapis.

Per tant, el propòsit de la meva investigació és fer una recerca en relació al càlcul mental per poder respondre a la pregunta que tant temps em ronda pel cap "són els alumnes que tenen dificultats per aprendre (o comprendre el que el docent explica) o és la metodologia emprada la que dificulta que els alumnes entenguin el que estan realitzant, i com a conseqüència, presentin dificultats a l'hora de calcular?".

[1] Càlcul que es realitza seguint uns passos ben definits, és a dir, seguint una sèrie de normes a aplicar en un ordre i que poden ser utilitzades independentment de les xifres amb les quals es treballi. En realitzar aquests càlculs es tracta a les xifres de manera aïllada com si fossin números i no es té en compte el valor de posició (saber les unitats, desenes i centenes que hi ha en un nombre i saber-lo descompondre).

Jo aposto per la darrera qüestió, és a dir, que la metodologia emprada dificulta que els alumnes vagin desenvolupant el seu gran potencial i els hi dificulta el fet de poder construir el seu propi coneixement per tal d'avançar amb la total confiança en la seves habilitats. Així doncs, la meva investigació anirà enfocada a conèixer i comprendre si fent un canvi en la metodologia d'ensenyar i aprendre les matemàtiques a l'escola i en concret del bloc de contingut matemàtic de numeració i càlcul afavoreix a la seguretat dels alumnes a l'hora de realitzar càlculs mentals, i s'aconsegueix que els sàpiguen resoldre sense gaire dificultat. Per tant, la meva recerca ha de poder demostrar que treballant d'una manera diferent a la que estem acostumats, és a dir, en la que l'alumne no aprèn a calcular a través d'unes normes fixes, també s'aprèn i es comprèn el que es fa.

Per aquest fet, faré la recerca a alumnes d'una escola que des de fa bastants anys van optar per realitzar aquest canvi i així podré treballar el càlcul mental amb nens i nenes que des de l'escola no se'ls ha ensenyat un algoritme basat en la memorització d'unes normes sense opció a ser modificades per resoldre càlculs, sinó que el docent els hi ha ensenyat uns continguts i fins i tot alguna estratègia perquè puguin treballar-les mentalment i per escrit, amb l'objectiu que les vagin interioritzant i se les vagin fent seves.

Aquest fet portarà a conèixer com nens i nens de 6è d'Educació Primària resolen càlculs mentalment de suma, resta, multiplicació i divisió i, poder respondre a la pregunta inicial dient que la metodologia emprada és la que dificulta que els alumnes avancin en el seu procés d'aprenentatge o no.

Aquest treball, per una banda, pot contribuir a entendre quines estratègies utilitzen els alumnes i amb quines dificultats es troben i per tant, tenir més coneixement de com els alumnes aprenen càlcul mental quan no se'ls ensenyen els algoritmes tradicionals. Per altra banda, pot aportar un gran coneixement personal en relació a les estratègies de càlcul mental per entendre com els alumnes comencen a elaborar la seva pròpia relació dels nombres i a poc a poc, van adquirint sentit numèric. A més, em pot aportar grans coneixements per transmetre a altres docents que no tenen coneixença d'aquest tema, i si aquest es posa en pràctica, es pot aconseguir una gran millora educativa.

També, gràcies a la recerca teòrica i al treball pràctic, pot impulsar a molts professionals del món educatiu a canviar la visió del que s'entén per càlcul mental i enfocar la seva pràctica educativa cap a una millora de la qualitat d'aquest contingut matemàtic. De la mateixa manera que pot ajudar a que el pensament negatiu que la societat té d'aquest vagi disminuint ja que se sol recordar el càlcul com un treball mecànic i sense comprensió que porta a la no reflexió. Això desencadena a una frustració, angoixa i pensaments negatius envers les matemàtiques.

Per tant, el tema de recerca escollit "les estratègies de càlcul mental" pot ajudar a que la societat, en concret els docents, reflexioni sobre el fet de deixar que els alumnes descobreixin estratègies de càlcul i de raonament matemàtic, i així aconseguir que els alumnes que presenten més dificultats de raonament o alumnes més lents puguin trobar la seva pròpia metodologia per arribar a resoldre operacions simples i/o complexes.

1.2 Pregunta de recerca i objectius

La pregunta de recerca plantejada en aquest treball final de màster, que servirà per plantejar els objectius de recerca, és la següent:

> "Com calculen mentalment els alumnes de 6è d'Educació Primària d'una escola que no se'ls ha ensenyat l'algoritme tradicional?"

Un cop formulada la pregunta de recerca, es planteja el següent objectiu general:

- Analitzar les estratègies de càlcul mental que els alumnes utilitzen.

Al mateix temps, es plantegen tres objectius específics:

1. Identificar les estratègies de càlcul mental que utilitzen els alumnes.
2. Analitzar les explicacions orals que els alumnes realitzen per tal d'explicar l'estratègia de càlcul mental utilitzada per resoldre el càlcul plantejat.
3. Identificar els errors que els alumnes realitzen a l'hora d'efectuar els càlculs.

1.3 Estructura del treball

El present treball consta de set parts. La primera és el *marc teòric*; on s'explica què és el càlcul mental i la importància d'aquest, considerant el que diuen els autors més referents dins aquest àmbit. Seguidament, es fa una síntesi dels diferents estudis realitzats en relació al càlcul mental a Educació Primària i una explicació de les estratègies de càlcul mental.

Un cop clars els conceptes teòrics, el segueix l'apartat de *metodologia*; en ell hi ha explicada la perspectiva metodològica de la recerca, la descripció del context de la recerca i de la mostra, l'eina de recollida de dades, l'obtenció de dades i el procés d'anàlisi de dades.

El següent apartat inclou *l'anàlisi dels resultats* obtinguts en la recerca, on es mostren diferents gràfics de barres dels resultats amb la seva corresponent descripció i valoració.

Després de tot l'estudi, es troba, per una banda les *conclusions* del treball en relació als objectius de recerca, i per altra banda, les *limitacions de la recerca* que s'han anat trobant al llarg de tota la investigació, les *implicacions educatives* que aporta la recerca i *futures recerques* a realitzar. En darrer terme, hi ha l'apartat de bibliografia i *webgrafia*.

Al DVD adjunt es troben els *Annexos*, amb la resolució dels càlculs proposats mitjançant diferents estratègies de càlcul, l'autorització dels drets d'imatge, els càlculs mostrats als alumnes, les graelles amb les dades transcrites i les graelles d'anàlisi de dades.

2. Marc teòric

En aquest apartat hi trobarem els conceptes teòrics que faran de base al llarg de tota la recerca. Hi ha bastants autors que parlen del tema però s'han analitzat els autors de referència en aquest i s'ha extret la informació argumentada a continuació.

El marc teòric s'ha estructurat en quatre apartats; el primer fa referència al significat del càlcul mental per diferents autors, al segon s'explica la importància d'aquest, al tercer es mostren diferents estudis referents el càlcul mental a Educació Primària i a l'últim, es presenten diferents estratègies de càlcul mental de suma, resta, multiplicació i divisió.

2.1 El càlcul mental

A continuació es mostraran les explicacions de diferents referents teòrics de la didàctica de la matemàtica en relació al que entenen per càlcul mental.

Per una banda, Canals (1992) afirma que el càlcul mental és aquell procés en el que el nen no veu ni toca els elements, és a dir, aquell en el qual no s'ajuda amb material ni amb dibuixos per plasmar la situació o els conjunts d'elements a partir dels quals haurà d'operar; en canvi, el nen haurà de tenir presents en la ment les situacions i les quantitats inicials; haurà de recordar-les i imaginar-les. Seguint amb el mateix pensament, Canals (2009), afegeix que el càlcul mental és un procés que demana dels alumnes una base d'experiència, i després una pràctica en les capacitats per posar atenció a les dades que hi intervenen, imaginar-se una situació i fer els càlculs sense tenir el material a la vista. Tot desenvolupant l'habilitat de compondre i descompondre nombres i connectant idees matemàtiques per poder relacionar la suma, la resta, la multiplicació i la divisió.

Per altra banda, Chamorro (2003) entén que el càlcul mental és un procediment mental individual ja que cada individu busca l'estratègia que més li convé o que millor sap utilitzar en el moment que ha de resoldre una operació mental. L'autora argumenta que el càlcul mental provoca que tothom pugui crear la seva pròpia estratègia ja que no existeix un únic procediment.

També, Ortiz (2012) explicita que el càlcul mental és un mètode per calcular operacions sense cap ajuda exterior, és a dir, un treball reflexiu que no requereix de cap material auxiliar, com és la calculadora, llapis i paper. D'aquesta manera, davant d'un càlcul s'ha de recórrer a l'ús d'estratègies matemàtiques per tal d'aconseguir resoldre el càlcul de la manera més simple possible. L'autora explica que per realitzar un bon càlcul mental es requereix d'un clima relaxant, amb diàleg (si és necessari) i amb una gran tranquil·litat.

Ortiz (2012) argumenta:

> El cálculo mental debe ser un cálculo sin ninguna ayuda exterior, basado en la exploración y reflexión, práctico, motivador, relajado, respetando el protagonismo y la autonomía de cada individuo, con flexibilidad de acción, diálogo, y en donde no debe primar la velocidad de respuesta (p. 7).

Així doncs, senten que el càlcul mental consisteix en realitzar càlculs matemàtics utilitzant només el cervell, sense ajuda de la calculadora o del llapis i el paper. Aquest procés mental permet que els alumnes pensin per ells mateixos, tot desenvolupant el seu propi pensament i així ajudant a aprofundir en el coneixement dels nombres, del sistema de numeració, del significat de les operacions i la relació entre elles.

2.2 Importància del càlcul mental

Parrish (2010), com a gran defensora del treball constant del càlcul mental a l'aula, tot usant estratègies mentals, afirma que el càlcul mental provoca més seguretat als alumnes a construir relacions numèriques que no quan utilitzen l'algoritme tradicional (procediments que fan treballar l'alumne mecànicament). Quan els alumnes treballen tot reflexionant sobre el càlcul en qüestió, se'ls anima a confiar en el que saben i intenten buscar recursos per acabar entenent la relació que hi ha entre els nombres. A més, ajuda a enfortir la comprensió del valor posicional dels nombres, a observar els nombres com a quantitats senceres en comptes de columnes i a adquirir el valor de cada nombre.

Com molt bé argumenten Parrish (2010), el càlcul mental no és una simple activitat d'aula que s'ha de realitzar uns dies en concret, sinó que és un contingut més de matemàtiques que s'ha de treballar de tres a cinc vegades a la setmana amb una durada de 5 a 15 minuts, tot incorporant-ho com a rutina diària.

Realitzant càlcul mental diàriament:

- **S'aconsegueix una comunicació a l'aula**. És important que el docent realitzi raonaments com: "estic d'acord amb...perquè; no ho he entès...pots tornar-ho a explicar?, etc."
- **Ajuda a acceptar, respectar i a considerar totes les respostes**. Cal acceptar totes les idees sense fer comentaris pejoratius. El docent s'ha de mostrar neutre amb totes les respostes; quan hi ha respostes incorrectes cal discutir perquè no són correctes.
- **Ajuda a desenvolupar sentit numèric**. Prendre consciència i comprensió dels nombres.

- **Permet desenvolupar fluïdesa amb nombres petits**. Cal saber descompondre i compondre els nombres.
- **Afavoreix el fet de comptar a cop d'ull**. Es tracta de reconèixer una col·lecció d'objectes com una unitat. Per exemple, reconèixer el cinc quan surten cinc punts en un dau.
- **Permet fer deus**. Per entendre el valor de posició dels nombres és molt important saber descompondre el 10.
- **Ajuda a comprendre el valor de posició**. Saber les unitats, desenes i centenes que hi ha en un nombre i saber-lo descompondre.
- **Permet que es comprengui l'aplicació de les propietats**. Aplicar les propietats commutativa, associativa, distributiva i element neutre per la suma, resta, multiplicació i divisió.
- **Permet connectar idees matemàtiques**. Relacionar la suma i la resta, la multiplicació i la divisió, etc.

A la mateixa línia que l'anterior autora, Ortiz (2012) argumenta que la pràctica diària de càlcul mental ajuda a desenvolupar diferents competències:

- La *competència matemàtica* ja que ajuda a aprofundir en la comprensió dels nombres i de les estructures numèriques.
- La *competència social i ciutadana* ja que es treballa en grup i potencia el fet de relacionar-se amb els altres a través de la comunicació i la interacció.
- La *competència d'aprendre a aprendre* ja que els alumnes han d'aprendre a aprendre processos nous, a ser autònoms i tenir iniciativa personal.
- La *competència lingüística* ja que els alumnes han d'interactuar entre ells tot explicant els processos que fan.

Tanmateix, potencia diferents habilitats i capacitats: *l'atenció i la concentració* –quan es calcula distreure's equival a començar de nou–, l'*organització* –quan es calcula s'ha de pensar pas a pas el procediment que es voldrà seguir i escollir el que es considera més fàcil, ràpid i correcte, per tant, això suposa aprendre a organitzar-se–, el *rigor* –quan es calcula s'ha de ser rigorós per no saltar-se cap pas per tal de no fallar en el resultat–, la *lògica* i el *raonament* –cada pas que es realitza implica reflexionar–, la *memòria a curt i llarg termini* –quan s'ha de recordar resultats entre els processos i quan s'ha de recordar patrons, taules de multiplicar, formules, etc.–, l'*autonomia* –quan es calcula mentalment, cada individu escull quina estratègia utilitzar, per tant, és un procés individual–, la *imaginació* i *creativitat* –quan s'escull quina estratègia s'ha d'utilitzar es posa en joc la imaginació i la creativitat– i el *saber prendre decisions* –s'ha d'escollir una manera de resoldre el càlcul entre moltes altres possibilitats–.

Tal i com afirmen Kamii i Dominick (2010), tots els alumnes tenen la capacitat per operar mentalment però no tots ho faran de la mateixa manera ni amb la mateixa rapidesa. Així doncs, s'ha de donar l'oportunitat a tots els alumnes per pensar i crear les seves pròpies estructures mentals, i així, aconseguir que no hagin de resoldre els càlculs mentals tot imaginant el càlcul escrit en un full i col·locat correctament (com si utilitzessin l'algoritme tradicional).

Els autors fan referència a la importància d'ensenyar als alumnes a utilitzar diferents estratègies de càlcul mental que els hi funcionin per resoldre diferents tipologies d'operacions enlloc d'ensenyar l'algoritme tradicional. Aquest promou que els alumnes renunciïn a desenvolupar el seu propi pensament, no ensenyen el valor posicional del dígit i això provoca que no desenvolupin significat numèric.

Encara avui dia hi ha docents que ensenyen l'algoritme tradicional per a realitzar el càlcul mental perquè pensen que és un procediment eficaç i creuen que és necessari tenir un mètode universal per a tots els alumnes. D'aquesta manera, els alumnes que tenen problemes amb les matemàtiques poden resoldre els algoritmes sense pensar què estan fent ja que si segueixen el mètode els hi surt. Però quan segueixen els passos sense entendre'ls, quan no se'n recorden del què han de fer per resoldre l'algoritme ja no tenen res més en què recolzar-se. Contràriament, quan els alumnes comencen a entendre la relació que hi ha entre els números i comencen a inventar els seus propis mètodes de resolució veuen que ho poden resoldre més fàcilment i molt més ràpid, per tant, és important desenvolupar l'habilitat de calcular mentalment.

2.3 Estudis sobre càlcul mental a Educació Primària

Hi ha diferents estudis referents al càlcul mental a les escoles que s'investiga els beneficis i/o inconvenients i els punts forts i/o dèbils de treballar el càlcul mental a través de dues metodologies ben diferenciades. Per una banda, es pot parlar de la *metodologia tradicional*, és a dir, ensenyant als alumnes a calcular a través de l'algoritme tradicional, i per altra banda, es pot parlar d'una *metodologia més oberta* en què els docents opten per treballar la competència matemàtica de forma manipulativa tot creant entorns d'aprenentatge a partir de materials manipulatius, tot animant als alumnes a manipular i experimentar amb un seguit de materials que són la base per construir i estructurar el pensament lògic que és bàsic en l'aprenentatge de les matemàtiques.

Fa més de quaranta cinc anys, Ablewhite (1971) advertia dels problemes que s'originaven en l'aprenentatge de les operacions i sobretot en els alumnes amb dificultats en seguir la metodologia ensenyada. Des de llavors, s'han anat senyalant complicacions derivades de l'ús d'uns algoritmes molt poc adequats pels alumnes. Més actualment, hi ha autors (Kamii i Dominick, 2010) que parlen dels errors i dificultats dels algoritmes tradicionals de càlcul i de les alternatives que hi ha per tal que aquestes no es vagin agreujant.

Tot seguit es mostraran diferents estudis que s'han realitzat en diferents escoles en relació al càlcul mental per comprendre quina és la metodologia que afavoreix als alumnes a calcular mentalment de manera natural, sense pors ni inquietuds ja que se senten segurs en realitzar els càlculs i porta a que facin el mínim d'errades possibles.

Per una banda, Martínez (2011) investiga si tot el que els teòrics argumentaven en referència a les dificultats de càlcul i als canvis de metodologia enfocant les matemàtiques des d'una perspectiva diferent a la tradicional, funciona en els alumnes que des d'Educació Infantil han treballat des d'una metodologia més oberta.

Aquesta investigació es va realitzar durant el curs escolar 2009-2010 a alumnes de 2n d'Educació Primària, a quatre escoles de Cadis. Dues d'elles eren públiques; el CEIP Andalucía i Carlos III. Aquestes no treballaven les matemàtiques a través de la metodologia tradicional i per tant, els 100 alumnes que es van investigar, des del començament de la seva escolaritat treballaven des d'una metodologia més oberta. Les dues escoles restants eren privades-concertades de molt prestigi a la zona i van servir de contrast. Cada una va aportar un grup d'alumnes aconseguint també un total de 100 alumnes.

L’autor i director de la investigació va optar per fer la recerca a alumnes de 2n ja que és l’últim curs del primer cicle d’Educació Primària i és un bon moment per avaluar la competència matemàtica, en concret el càlcul mental i la resolució de problemes, que tant important són per a la vida quotidiana i que en el currículum apareix com a objectiu a assolir en l’acabament de l’etapa.

A la investigació va participar l’autor de l’article ja que era el director de la recerca, vuit docents i els grups d’alumnes que formaven un total de 200 alumnes. La prova de càlcul mental, que es va realitzar de manera individual, consistia en presentar diferents cartells amb operacions a realitzar –tres sumes, tres restes, dues multiplicacions i una divisió– i havien de dir el resultat en veu alta, sense poder utilitzar cap material.

Després de realitzar l’anàlisi de les dades, es va comprovar que llevat d’una multiplicació, les diferencies a favor dels nens que no havien treballat a través de l’algoritme tradicional eren molt clares. Aquests alumnes tardaven entre 15 i 25 segons a respondre a la pregunta plantejada per tal d’argumentar el resultat del càlcul, en canvi, els alumnes que havien treballat a partir de l’algoritme tradicional tardaven molt més –si hagués hagut un temps màxim, no haurien pogut resoldre quasi bé cap dels càlculs–. Els alumnes que havien après a partir d’una metodologia més oberta van arribar a un nivell superior que els altres alumnes, és a dir, van ser capaços de resoldre més càlculs i argumentar numèricament perquè realitzaven el que feien. Això no volia dir que els alumnes que treballaven a través de la metodologia tradicional no fossin alumnes amb un nivell alt en matemàtiques ja que es va comprovar que tenien un molt bon nivell matemàtic, però a causa de les limitacions imposades per la metodologia emprada provocava que hi haguessin càlculs que no podien acabar de resoldre. Això era perquè no ho havien treballat a l’aula i no ho havien practicat ni interioritzat de manera memorística, i amb els seus coneixements no eren capaços de trobar altres camins per resoldre’ls.

No s’esperava que hi hagués una diferència tan gran entre els resultats, ja que els alumnes que treballaven mitjançant l’algoritme tradicional tenien les taules de multiplicar molt interioritzades i el mecanisme de les operacions molt treballat. Es pensava que resoldrien els càlculs sense gaire complicacions però aquests van presentar moltes dificultats ja que cada càlcul realitzat l’havien de representar mentalment i col·locar les xifres en ordre com si ho fessin en un full de paper, havien de guardar a la memòria tots els nombres i tardaven molt temps i com a conseqüència realitzaven errors. En canvi, els altres alumnes operaven directament, una quantitat molt àmplia d'estratègies en les quals descomponien els nombres, feien dobles, nombres de referència, etc., mostrant la seva habilitat gràcies a l'entrenament amb material manipulatiu.

D'aquesta manera es va poder comprovar que ni tan sols un ensenyament molt mecànic i repetitiu supera a la velocitat que s'arriba quan els càlculs es realitzen amb sentit i de manera reflexiva.

Per tal de comparar i analitzar els resultats, es van fixar en si havien resolt els càlculs *molt bé*, *bé*, *regular* o *malament*. A continuació, només ens fixarem en el percentatge d'alumnes que els van resoldre *molt bé* i *malament*:

En relació a les tres sumes que es van plantejar –428+351; 628+239; 586+352–, el 59% dels alumnes que van utilitzar l'algoritme tradicional van resoldre-les *molt bé* i el 20% dels alumnes *malament*. Contràriament, els alumnes que van utilitzar una metodologia més oberta d'aprenentatge de les matemàtiques van resoldre-les *molt bé* un 82% i un 5% *malament*.

Pel que fa a les tres restes plantejades –934-231; 448-229; 727-355–, el 37% dels alumnes que van utilitzar l'algoritme tradicional van resoldre-les *molt bé* i el 35% dels alumnes *malament*. Contràriament, els alumnes que van utilitzar una metodologia més oberta d'aprenentatge de les matemàtiques van resoldre-les *molt bé* un 75% i un 24% *malament*.

En relació a les dues multiplicacions plantejades –234x2; 313x3–, el 83% dels alumnes que van utilitzar l'algoritme tradicional van resoldre-les *molt bé* i el 12% dels alumnes *malament*. Contràriament, els alumnes que van utilitzar una metodologia més oberta d'aprenentatge de les matemàtiques van resoldre-les *molt bé* un 88% i un 5% *malament*.

Per últim, la divisió que es va plantejar –628:2–, el 29% dels alumnes que van utilitzar l'algoritme tradicional van resoldre-les *molt bé* i el 67% dels alumnes *malament*. Contràriament, els alumnes que van utilitzar una metodologia més oberta d'aprenentatge de les matemàtiques van resoldre-les *molt bé* un 87% i un 6% *malament*.

S'observa que el percentatge d'alumnes que resolen els càlculs *molt bé* és molt més alt en els alumnes que a l'escola treballen les matemàtiques mitjançant el mètode obert basat en la manipulació de material i aplicant estratègies de càlcul variades que no pas els alumnes que utilitzen la metodologia tradicional. Tanmateix, els alumnes que van resoldre els càlculs a través de l'algoritme tradicional van realitzar molts més errors ja que el percentatge d'alumnes que van resoldre'ls *malament* és molt més elevat.

Per altra banda, Aragón, Canto, Marchena, Navarro i Aguilar (2017) van realitzar un estudi –semblant a l'anterior– a diferents grups d'alumnes que entre ells no havien treballat les matemàtiques de la mateixa manera, sinó que uns havien treballat a partir del mètode tradicional i els altres no. Amb l'estudi realitzat, els autors van voler observar si el fet d'haver estat ensenyats a partir de mètodes diferents, afavoria de la mateixa manera o no, el desenvolupament de les habilitats cognitives –la memòria de treball, el nivell d'intel·ligència fluida o el processament visuoespacial– ja que afirmaven que és de vital importància que el treball matemàtic porti a desenvolupar-les perquè si aquestes no es desenvolupen fa que els estudiants presentin dificultats d'aprenentatge de les matemàtiques. Per tant, és important que des d'Educació Infantil es comenci a treballar per aconseguir un benefici cognitiu o un desenvolupament d'habilitats mentals.

Així doncs, en aquest estudi comparen dos mètodes de treball matemàtic per poder argumentar quin és el mètode que permet desenvolupar amb un nivell més elevat les habilitats cognitives tan importants per aconseguir un bon domini dels nombres quan es relacionen entre ells i així aconseguir una bona base matemàtica per millorar els problemes de l'aprenentatge de les matemàtiques.

A la investigació van participar 128 estudiants del primer cicle d'Educació Primària, 63 nens i 65 nenes. Aquests pertanyen a 4 escoles diferents –dos escoles concertades i dos escoles públiques– que presenten un nivell socioeconòmic mitjà-baix. D'aquest total d'alumnes, 74 –de 5 aules diferents– van ser ensenyats des d'Educació Infantil a partir d'un mètode matemàtic d'aprenentatge més obert, basat en la utilització de materials i en l'aprenentatge i elaboració d'estratègies de càlcul útils per a la vida diària, i els 54 alumnes restants –de 4 aules diferents– van treballar les matemàtiques a través del mètode tradicional, és a dir, utilitzant l'algoritme tradicional.

Per començar amb l'estudi es van realitzar diferents proves a tots els alumnes per tal d'avaluar l'habilitat matemàtica tot realitzant comparacions i classificacions de nombres i elements, correspondència un a un i seriacions. També van realitzar dos tests, un per avaluar la memòria de treball a través de diferents càlculs mentals i l'altra per avaluar si eren capaços de donar sentit a un material desestructurat (falta una part o característica), establint relacions del tipus lògic.

En realitzar totes les proves i obtenir els resultats, el autors van poder argumentar que el mètode obert d'aprenentatge de les matemàtiques es caracteritza per una forta implicació de les habilitats cognitives a l'hora de resoldre activitats numèriques bàsiques ja que els alumnes han estat entrenats amb molt material manipulatiu i figuratiu. S'ha comprovat que la memòria de treball té un gran pes i gràcies a aquesta operen de manera més eficient i fluida aplicant mentalment representacions numèriques amb les que han sigut entrenats. Això porta a un gran estalvi de recursos cognitius que es tradueixen en menor temps a l'hora de resoldre les preguntes qüestionades. Per tant, aquest mètode genera guanys al desenvolupament d'aquells processos cognitius de domini general que són importants per arribar a l'èxit de les matemàtiques i també genera guanys en la memòria de treball.

Tot i així, es pot dir que els alumnes que treballen a partir de l'algoritme tradicional tenen una intel·ligència elevada perquè han desenvolupat una memòria de treball a l'hora de realitzar càlcul mental ja que han de retenir molts nombres a la ment a l'hora de col·locar les xifres ràpidament en l'ordre ensenyat, com si ho plasmessin en un full de paper tot elaborant l'algoritme tradicional. Però això porta a que realitzin el que tenen tan interioritzat i mecanitzat que no acaben d'entendre perquè es realitzen els processos mentals i provoca que hi hagi una sobrecarrega cognitiva i hi hagi una major probabilitat d'errar en els resultats.

Després de tot l'estudi i de l'obtenció dels resultats, els autors argumenten que el càlcul és un bon indicador de les dificultats d'aprenentatge en matemàtiques ja que els estudiants que presenten problemes durant l'Educació Primària els continua tenint durant l'escolarització posterior. Per tant, s'ha de treballar el càlcul de la manera més eficient i comprensible possible ja que, tal i com afirmen els autors, els alumnes que utilitzen l'algoritme tradicional els perjudica en l'aprenentatge de les matemàtiques perquè adquireixen poques estratègies i mètodes espontanis per resoldre càlculs no rutinaris i tenen dificultats o no comprenen el significat de les quantitats expressades en xifres més elevades. És necessari que aprenguin estratègies de càlcul i que se les facin seves tot entenent el significat.

Kamii i Dominick (2010), donen a conèixer la investigació realitzada l'any 1994 amb la qual va voler promoure i demostrar que ensenyar els algoritmes tradicionals als alumnes, els aporta efectes perjudicials ja que sense explicar en què consisteix l'algorisme de les operacions, els nens i nenes ja són capaços d'entendre perfectament el concepte i aplicar-lo en diferents situacions de la seva vida quotidiana.

La investigació es va dur a terme amb alumnes de segon, tercer i quart d'Educació Primària a l'escola on Kamii havia treballat. En aquesta hi havia docents que havia ensenyat l'algoritme tradicional i altres no, així doncs, hi havia un grup que no havia treballat mai a partir de l'algoritme tradicional, dos grups que algun docent els hi havia ensenyat i els altres no, i un altre grup que només havien treballat el càlcul a través de l'algoritme tradicional. Amb aquest estudi es volia demostrar que els alumnes eren capaços d'inventar-se les seves pròpies estratègies per resoldre sumes, restes i multiplicacions sense haver d'utilitzar l'algoritme tradicional.

Després de dur a terme la investigació, es van comparar el resultat dels nens i nenes que utilitzaven l'algorisme tradicional amb els resultats dels nens i nenes que seguien els seus propis procediments a l'hora de fer càlculs.
Es van adonar que els alumnes que seguien els seus propis procediments, fruit de les seves pròpies reflexions, obtenien millors resultats i tenien major coneixement sobre el concepte de valor de posició que no els alumnes que, simplement, aplicaven l'algoritme tradicional. A més argumentava que els nens i nenes també perden coneixement conceptual quan se'ls hi ensenya l'algoritme tradicional i, a més, provoca que el seu desenvolupament del pensament lògic i el raonament numèric es freni. Per tant, tot el potencial que disposen els nens i nenes s'ha d'intentar desenvolupar en lloc de posar traves. Aquests necessiten passar pel seu propi procés de construcció de coneixement per tal de seguir endavant amb la total confiança en les seves habilitats i resoldre tots els problemes que es trobin en el camí.

2.4 Estratègies del càlcul mental

Fa uns anys, i encara avui en dia, es creia que per resoldre càlculs mentals s'havia de resoldre de la mateixa manera que es feia per escrit, és a dir, imaginar el càlcul col·locat al full (utilitzant l'algoritme tradicional). Però després de molts estudis, s'ha comprovat que no només hi ha una única manera per resoldre'ls mentals sinó que n'hi ha moltes, i que a més, cada individu pot elaborar la seva ja que tothom és diferent i per tant, hi ha diferents maneres de pensar i com a conseqüència, d'operar.

Ortiz (2011) i Kamii i Baker (2000) parlen de les diferents estratègies per treballar els càlculs mentals, però en aquest apartat s'explicaran les que proposa Parrish (2010) en el seu llibre *Number talks: helping build math and computation strategies*.

2.4.1 Estratègies per la suma[2]

Cadascuna de les estratègies que s'esmentaran a continuació té un *nom* que ajuda a entendre el seu funcionament (a banda d'aquestes estratègies, els alumnes se'n poden inventar d'altres i posar-hi el nom que vulguin).

- Descompondre els dos nombres segons el valor de posició

> - **116 + 118**
>
> (100 + 10 + 6) + (100 + 10 + 8)
>
> 100 + 100 = 200
> 10 + 10 = 20
> 6 + 8 = 14
>
> 200 + 20 + 14 = **234**

Quan els nens comencen a entendre el valor de posició, aquesta és una de les primeres estratègies que fan servir. Cada sumand es descompon i es combinen les quantitats (unitats amb unitats, desenes amb desenes i centenes amb centenes).
Els nens tendeixen a treballar d'esquerre a dreta, ja que mantenen la magnitud dels nombres.

[2] S'han utilitzat els mateixos nombres en totes les estratègies (116 + 118).

- Descompondre un dels nombres segons el valor de posició o en nombres més petits

> **116 + 118**
>
> 116 + (100 + 10 + 8)
>
> 116 + 100 = 216
>
> 216 + 10 = 226
>
> 226 + 8 = **234**

Aquesta estratègia és similar a l'explicada anteriorment, excepte que en aquest cas només es descompon un dels nombres, mantenint l'altre sumand sencer.

- Fer números de referència

> **116 + 118**
>
> $\underline{+ \quad\quad 2}$
>
> 116 + 120 = 236
>
> 236 – 2 = **234**

Els nombres de referència són números que són fàcils d'utilitzar en el càlcul mental (els múltiples de deu, cent, mil, etc.). Els alumnes poden modificar el sumand afegint o restant quantitats per fer un nombre de referència o un número amic. En aquest exemple, el 118 es modifica afegint-li dos unitats per convertir-lo en un nombre més senzill (120). Un cop realitzada l'operació, s'ha de restar el que s'ha afegit anteriorment.

- Fer dobles

> **116 + 118**
>
> $\underline{-1 \quad\quad -3}$
>
> 115 + 115 = 230
>
> 230 + 4 = **234**

Des d'Educació Infantil, els nens són capaços de recordar sumes gràcies als dobles. Aquesta estratègia aprofita aquest fet per ajustar un o ambdós nombres per fer una combinació de dobles. En aquest exemple, els nombres es podrien modificar de diverses maneres però els nombres acabats en 5 solen ser més fàcils. Una vegada s'ha realitzat l'operació, s'ha de sumar o restar la quantitat extreta o afegida inicialment.

- Fer deus

> **116 + 118**
>
> (110 + 4 + 2) + (110 + 8)
>
> 110 + 110 + (2 + 8) + 4
>
> 110 + 110 + 10 + 4
>
> 230 + 4 = **234**

L'objectiu d'aquesta estratègia és ser capaç d'utilitzar la fluïdesa amb el deu per millorar l'addició. En la imatge es pot observar com s'ha descompost el 6 en 2 i 4, sumant-li el 2 al 8 del segon sumand per tal de construir un 10.

- Compensar

> **116 + 118**
>
> **A. 116 + 118**
> -2 +2
>
> 114 + 120 = **234**
>
> **B. 116 + 118**
> +4 -4
>
> 120 + 114 = **234**

Aquesta estratègia és similar a *Nombres de referència*, on es manipulen els números per convertir-los en d'altres més senzills. La característica principal d'aquesta estratègia i que la diferència de l'altra, és que quan es treu una quantitat a un sumand s'ha de donar la mateixa quantitat a l'altre sumand. *Compensar* és molt útil pels alumnes ja que es pot afegir i treure qualsevol quantitat, sempre i quan aquestes siguin igual en els dos nombres.

A l'exemple *A* s'ha afegit dos unitats al 118 per tal de convertir-lo en un número més fàcil, i per tant, se li ha tret la mateixa quantitat al 116. A l'exemple *B*, trobem una altra possibilitat, aquesta vegada s'ha sumat quatre unitats al 116 convertint-lo en 120, i s'ha tret la mateixa quantitat a l'altre sumand per tal de compensar.

2.4.2 Estratègies per la resta[3]

La resta va molt més enllà de treure/eliminar una quantitat a una xifra ja que s'ha d'entendre que restar és extreure una part d'una quantitat i pot implicar la recerca de la diferència de dos nombres i la comparació dels nombres.

És important ajudar als estudiants a entendre cada tipus de resta i desenvolupar un ventall ben ampli d'estratègies eficients. Aquestes estratègies a l'igual que les de la suma que s'han vist anteriorment, tenen un nom que dóna una pista sobre com es desenvolupa cada una, però el nom pot ser adaptat i canviat pels alumnes.

- Descompondre els nombres segons el valor de posició

➢ **123 - 59**

(100 + 20 + 3) - (50 + 9)

100	20	3
-	50	9

100 – 30 – 6

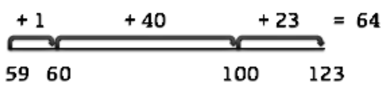
100 – 30 = 70
70 - 6 = **64**

Cada nombre és descompost segons el seu valor posicional i s'agrupen segons el seu lloc de posició i després es resten.

El fet de col·locar els nombres en columnes sembla que utilitzin l'algoritme tradicional però en aquest cas no s'oblida del valor de cada xifra i aquest coneixement s'utilitza en el càlcul.

- Sumar cap endavant

➢ **123 - 59**



59 + 1 = 60

60 + 40 = 100

100 + 23 = 123

1 + 40 + 23 = **64**

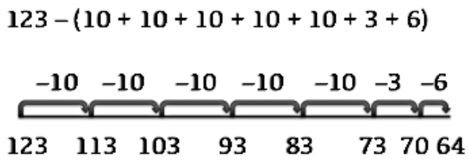
Aquesta estratègia permet a l'alumne aprofitar la seva habilitat amb l'addició, sumant des del subtrahend fins al minuend. Quan els alumnes comencen a entendre que la resta és trobar la diferència entre les dues quantitats, s'adonen que sumant poden calcular aquesta distància.

El docent ha d'ajudar a l'alumne a realitzar els salts per arribar a la desena més propera o a un nombre de referència. Quant més grans siguin aquests salts, més útil serà aquesta estratègia.

[3] S'han utilitzat els mateixos nombres en totes les estratègies (123 – 59).

- Comptar endarrere o descompondre el nombre a restar

➢ **123 - 59**



A. 123 - (20 + 30 + 3 + 6)

123 – 20 = 103

103 – 30 = 73

73 – 3 = 70

70 – 6 = **64**

B. 123 – (50 + 9)

123 - 50 = 73

73 – 9 = **64**

Si els alumnes han entès la resta com la distància entre els dos nombres, arribaran per ells mateixos a aquesta estratègia. En aquest cas, a partir del total o minuend, s'ha de treure el subtrahend en parts que siguin fàcil pels alumnes; en aquest punt intervindrà l'habilitat per descompondre nombres. Hi haurà alumnes que els hi serà més fàcil treure quantitats grans i d'altres que ho faran amb nombres més petits i múltiples de 10.

- Mantenir una diferència constant

➢ **123 - 59**

123 + 1 = 124

\-

59 + 1 = 60

64

Aquesta estratègia es basa en modificar, afegir o treure, la mateixa quantitat ambdós nombres. A l'exemple, les dues quantitats han estat modificades afegint una unitat a cadascun per tal d'aconseguir nombres més senzills, ja que el 59 s'ha convertit en 60 i els càlculs amb zeros són més simples.

- Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla

> - **123 - 59**
>
> 123
> \-
> 59 + 1 = 60
> 63 + 1 = **64**

Aquesta estratègia té com objectiu ajustar un dels nombres per crear una operació més senzilla. Quan es fa servir aquesta estratègia, l'alumne s'ha de plantejar quin dels dos nombres és més útil per ajustar i com s'ha de compensar en la solució final.

A l'exemple, s'ha afegit una unitat al segon sumand per tal de realitzar una suma amb zeros i convertir-ho en una operació més senzilla. Una vegada s'ha realitzat la resta, s'ha de compensar, en aquest cas, al haver afegit un nombre al subtrahend, la diferència entre els dos s'ha fet més petita; per tant, al resultat final s'ha d'afegir la mateixa quantitat per tenir la diferència inicial.

2.4.3 Estratègies per la multiplicació[4]

Comprendre que els factors es poden dividir en diferents combinacions de sumands o en factors més petits (descompondre), és una idea important que els estudiants han d'entendre per tal de començar a desenvolupar les seves pròpies estratègies per aquesta operació.

Aquestes estratègies, tenen un nom que dóna una pista sobre com es desenvolupa cada una, però el nom pot ser adaptat i canviat pels alumnes.

- Fer una suma iterada

> - **5 x 12**
>
> **A.** 12 + 12 + 12 + 12 + 12
>
> 12 + 12 = 24
> 24 + 12 = 36
> 36 + 12 = 48
> 48 + 12 = **60**

Aquesta és l'estratègia que utilitzen els alumnes quan estan aprenent el concepte de multiplicació, ja que els ajuda a construir connexions. Tal i com s'observa a l'exemple, els alumnes sovint pensen en el problema 5x12 com 5 grups de 12 i resolent mitjançant l'addició del número 12.

[4] S'han utilitzat uns nombres diferent per cada estratègia ja que s'ha volgut que quedés reflectida la metodologia emprada per a cada estratègia de la manera més natural i senzilla possible, i depenent de quin nombre s'utilitzi, el càlcul queda resolt molt forçat.

- Usar fets coneguts i/o nombre de referència

> **9 x 15**
>
> 10 x 15 = 150
>
> 150 – 15 = **135**

Amb aquesta estratègia els alumnes modifiquen un número per tal d'aconseguir un nombre de referència i així fer l'operació més ràpid. En aquest cas, es modifica el número 9 pel 10 i així facilita el treball i com a conseqüència l'obtenció del resultat.

- Productes parcials

> **12 x 15**
>
> **A. 12 x (10 + 5)**
>
> 12 x 10 = 120
>
> 12 x 5 = 60
>
> 120 + 30 = **180**
>
> **B. (4 + 4 + 4) x 15**
>
> 4 x 15 = 60
>
> 4 x 15 = 60
>
> 4 x 15 = 60
>
> 60 + 60 + 60 = **180**
>
> **C. (10 + 2) x (10 + 5)**
>
> 10 x 10 = 100
>
> 10 x 5 = 50
>
> 2 x 10 = 20
>
> 2 x 5 = 10
>
> 100 + 50 + 20 + 10 = **180**

Aquesta estratègia es basa en la propietat distributiva. En l'exemple A, el número 15 s'ha descompost en 10+5. A continuació s'ha multiplicat el 12 pel 10 i després pel 5. Els dos resultats obtinguts s'han sumat.

En l'exemple B, el 12 s'ha descompost en 4+4+4 i s'ha multiplicat tres vegades 4x15. Els tres resultats obtinguts s'han sumat.

En l'exemple C, els dos factors s'han descompost; el 12 en 10+2 i el 15 en 10+5. S'han realitzat les operacions pertinents i els resultats obtinguts s'han sumat.

- Fer dobles i meitats

> ➢ **6 x 25**
>
> 6 x 25
>
> (:2) 3 (x2) 50
>
> 3 x 50 = **150**

Aquesta estratègia es basa en fer la meitat d'un dels factors i el doble de l'altre. Com es pot observar en l'exemple, el 6 s'ha simplificat a 2 i el 25 ha augmentat a 50, en aquest cas un dels factors s'ha modificat en un nombre acabat en 0 i això simplifica molt més el càlcul.

- Descompondre els factors en factors més petits

> ➢ **12 x 25**
>
> **A. (4 x 25) + (4 x 25) + (4 x 25)**
>
> 100 + 100 + 100 = **300**
>
> **B. (4 x 25) + (4 x 25) + (4 x 25)**
>
> 3 x (4 x 25)=
>
> 12 x 25 =
>
> 12 x (5 x 5)=
>
> (12 x 5) x 5=
>
> 60 x 5 = **300**

La propietat associativa és la base d'aquesta estratègia. Tal i com s'observa a l'exemple A, el 12 és descompost en 3 grups de 4. A continuació cada grup de 4x25 es multiplica i els tres resultats se sumen.

En l'exemple B, igual que en l'anterior es formen tres grups però es resolt més ràpidament ja que enlloc de multiplicar els tres grups, el que es fa és multiplicar-ne només un i el resultat multiplicar-lo per 3 (ja que hi ha tres grups iguals).

2.4.4 Estratègies per la divisió[5]

Vincular la divisió amb la multiplicació ajuda als estudiants a utilitzar aquesta relació per inventar estratègies flexibles i eficients. És important que els alumnes utilitzin el que saben de la multiplicació per comprendre la divisió. Per tant, és necessari que els docents presentin problemes de multiplicació i divisió junts, per tal d'ajudar als estudiants a realitzar aquesta connexió. La introducció de la divisió en un context història-problema que per als estudiants sigui engrescador i significatiu, els pot ajudar a donar sentit a aquesta operació. És de vital importància oferir un gran ventall de problemes, de diferents contextos, incloent-hi la divisió que els ajudarà a desenvolupar una millor comprensió de la divisió i ser capaços de resoldre-les de diferents maneres.

A continuació es mostren les diferents estratègies de la divisió –aquestes tenen un nom que dóna una pista sobre com es desenvolupa cada una, però el nom pot ser adaptat i canviat pels alumnes–.

- Restar de manera iterada

➢ **30 : 5**

30 – 5 = 25 (1)
25 – 5 = 20 (2)
20 – 5 = 15 (3)
15 – 5 = 10 (4)
10 – 5 = 5 (5)
5 – 5 = 0 (6)

30 : 5 = **6**

Aquesta estratègia es basa en començar a operar pel dividend i restar-li el divisor fins que el resultat sigui zero o més petit que el divisor. El resultat serà la suma dels cops que s'ha restat el divisor.

- Sumar de manera iterada

➢ **23 : 5**

5 + **5** = 10
10 + **5** = 15
15 + **5** = 20
23 – 20 = **3**

23 : 5 = **4**
Residu = **3**

Aquesta estratègia es basa en sumar tantes vegades com faci falta el divisor per obtenir el dividend o el nombre més pròxim. El resultat serà la suma dels cops que s'ha sumat el divisor.

5 S'ha utilitzat uns nombres diferent per cada estratègia ja que s'ha volgut que quedés reflectida la metodologia emprada per a cada estratègia de la manera més natural i senzilla possible, i depenent de quin nombre s'utilitzi, el càlcul queda resolt molt forçat.

- Multiplicar

➢ **827 : 15**

10 x 15 = 150
10 x 15 = 150
10 x 15 = 150
10 x 15 = 150
10 x 15 = 150
4 x 15 = 60
1 x 15 = 15

750 + 60 + 15 = 825
10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 + 1 = 55
827 : 15 = **55**
827 – 825 = **2** / Residu=**2**

A través d'aquesta estratègia, els estudiants s'adonen que poden multiplicar el divisor per la xifra que més els hi convingui fins a arribar al dividend. En l'exemple, es multiplica el divisor per 10, per 4 i per 1. El resultat de totes les multiplicacions se suma -750+60+15- i dóna 825 i per tant, no és una divisió exacte ja que per arribar a 827 en falten 2, que serà el residu de l'operació.

- Fer divisions parcials

➢ **456 : 16**

A. **456 | 16**
\- 160 10
269
\- 160 10
136
\- 80 5
56
\- 48 3
8 28

456 : 16 = **28**

Residu = **8**

B. **456 | 16**
\- 320 20
136
\- 64 4
72
\- 64 4
8 28

456 : 16 = **28**

Residu = **8**

Aquesta estratègia permet treballar amb quocients coneguts com és el 10, el 5 i el 2, sense haver de buscar immediatament el quocient més gran. A mesura que l'estudiant té més confiança en la utilització de l'estratègia, anirà escollint quocients cada vegada més grans i la divisió serà més ràpida de resoldre.

En l'exemple A, es pot observar com el procés de resolució és bastant llarg ja que utilitza nombres petits. Per altra banda, en l'exemple B, la divisió està resolta amb menys passos –el vint i dos quatres–. Finalment se sumen tots els quocients que s'han necessitat i el resultat serà el quocient de la divisió.

- Com a raonament proporcional

> **384 : 16**
>
> (:2) 192 (:2) 8
>
> (:2) 96 (:2) 4
>
> (:2) 48 (:2) 2
>
> 384 : 16 = **24**
>
> 192 : 8 = **24**
>
> 96 : 4 = **24**
>
> 48 : 2 = **24**

A mesura que els estudiants van adquirint més coneixement matemàtic i tenen una comprensió dels factors, dels múltiples i del raonament fraccionari, poden mirar la divisió des d'una perspectiva de raonament proporcional. Els alumnes utilitzen aquesta estratègia si prèviament han tingut experiència amb els dobles i les meitats per resoldre problemes de multiplicació.

Si el dividend i el divisor comparteixen factors comuns es podrà dividir el dividend i el divisor per la mateixa quantitat.

- Dividir descomponent

> **214 : 2**
>
> 200 : 2 = 100
>
> 10 : 2 = 5
>
> 4 : 2 = 2
>
> 100 + 5 + 2 = **107**

Aquesta estratègia és semblant a la de *Productes parcials* de la multiplicació però aquest cas realitzant divisions.

S'utilitza quan el dividend resulta massa complicat de dividir amb el divisor i es descompon segons el seu valor de posició. A l'exemple s'observa com el 214 s'ha descompost en 200, 10 i 4 i així es poden fer divisions més simples. Finalment, els resultats se sumen i s'obté el quocient de la divisió.

3. Metodologia

En aquest apartat es presenta la metodologia emprada al llarg de la investigació. Primerament es fa referència a la perspectiva metodològica de la recerca, seguidament es realitza una descripció del context i de la mostra per saber on es realitzarà la investigació i qui participarà. A continuació, es troba l'eina d'obtenció de dades, l'obtenció d'aquestes i el procés d'anàlisi de les dades.

3.1 Perspectiva metodològica de la recerca

La metodologia utilitzada en aquesta recerca és majoritàriament **qualitativa** ja que s'analitzen les explicacions dels alumnes de 6è d'Educació Primària qualitativament. Tanmateix, té elements **quantitatius** ja que s'analitza la quantitat d'alumnes que utilitzen una estratègia o una altra, quin tant per cent d'alumnes les resolen correctament o incorrectament, i quina quantitat d'alumnes saben explicar el procés que realitzen per resoldre els càlculs que se'ls hi proposa. Per tant, per una banda s'han obtingut unes dades a través de paraules, flexibles i obertes que s'han analitzat per extreure'n el que realment interessa i per altra banda, s'han obtingut unes dades que són quantificables i permeten realitzar una anàlisi estadístic. Totes les dades s'han categoritzat, organitzat i es relacionat amb el que els teòrics afirmen per tal d'obtenir resultats coherents i verdaders.

Amb aquest estudi es vol aprofundir en el coneixement del tema de recerca a partir del treball pràctic que s'ha realitzat a l'escola escollida, per tant, l'investigador està involucrat en tota la recerca. Tal i com argumenta Salgado (2007), serà un coneixement que sorgirà de la interacció entre els dos agents (l'investigador i els alumnes).

Des de l'àmbit de la investigació, un paradigma és un esquema teòric o una via de percepció i comprensió del món que un grup de científics ha adoptat. Optar per un tipus de paradigma o un altre dins la recerca educativa posiciona l'investigador en un determinat coneixement que afecta des del marc teòric fins al metodològic. La present investigació s'emmarca dins d'un **paradigma interpretatiu** ja que centra el seu interès en interpretar, comprendre i analitzar les diferents estratègies de càlcul mental que nens i nenes de 6è d'Educació Primària de l'escola Quatre Vents de Manlleu utilitzen, la quantitat d'alumnes que utilitzen una estratègia i/o una altra, quants alumnes saben explicar el procés per resoldre el càlcul que realitzen, etc.

Seguint les argumentacions de Latorre, Del Rincón i Arnal (2005), és una **investigació interpretativa** ja que una de les finalitats de recerca és interpretar tot el que els alumnes expliquen com a resposta del que se'ls hi qüestiona. Per tant, l'investigador i els alumnes tenen un rol actiu que porta a obtenir unes dades qualitatives i quantitatives, que serveixen per poder estudiar una realitat i per poder comprendre millor el que els autors esmentats en el marc teòric afirmen. Tal i com argumenten Latorre, Del Rincón i Arnal (2005) "Los investigadores de orientación interpretativa se centran en la descripción y comprensión de lo que es único y particular del sujeto más que en lo generalizable" (p. 42).

El mètode d'investigació utilitzat és un **estudi de cas** ja que seguint les argumentacions de Merriam, 1988, p. 41 citat per Simons, 2011, aquest es basa en una descripció i anàlisi intensiu d'una entitat, un fenomen o una unitat social de manera particular i descriptiu. L'objectiu de la present recerca és realitzar un estudi, fixant-se en les argumentacions de 20 alumnes de 6è d'Educació Primària a l'hora de respondre una sèrie de preguntes per tal d'obtenir les dades que interessa estudiar.

3.2 Descripció del context de la recerca i de la mostra

L'escola Quatre Vents és on s'ha dut a terme la recerca. Aquesta està ubicada a la zona nord de Manlleu, relativament apartada del centre del poble. És una escola de nova creació, creada al 2004-2005 que ha anat creixent progressivament, fins que actualment hi ha 2 línies per curs, exceptuant alguns casos que n'hi ha 3.

És un centre educatiu públic i laic que inclou Educació Infantil i Educació Primària, i disposa d'un equip docent d'aproximadament 50 professionals i 500 alumnes, dels quals un 40% són immigrants.

És una escola que està dins el *Projecte de matemàtiques competencials*, el qual s'opta perquè tots i totes les alumnes desenvolupin un aprenentatge d'aquesta àrea de forma més significativa. Pretenen avançar cap a una metodologia innovadora de les matemàtiques i entenen que les matemàtiques no és una matèria complexa sinó que és una matèria que necessita que es comprengui i per tant, es necessita molta dedicació. Ja fa 5 anys que els docents es van formant a través d'assessorament, per part de professionals del Grup de Recerca Coneixement i Didàctica (CODI)[6], per aconseguir una millora en molts continguts de les matemàtiques.

[6] Grup de recerca de la Universitat de Vic que emmarca les seves activitats de recerca en l'estudi dels processos de construcció del coneixement didàctic dels professionals que es dediquen a l'ensenyament en àrees específiques i les formes d'aplicar el coneixement didàctic als processos d'ensenyament-aprenentatge de les disciplines acadèmiques.

És una escola molt oberta a tothom i amb moltes ganes de millorar en el procés d'aprenentatge, per tant, es creu que la recerca els hi serà d'un gran ajut per tal d'analitzar i comprendre si tota la feina realitzada de càlcul està funcionant o no. Així doncs, l'estudi que es realitzarà es basa en analitzar com els alumnes de 6è d'Educació Primària, que des de l'escola no se'ls ha ensenyat l'algoritme tradicional sinó que els docents els hi han ensenyat diferents estratègies de càlcul i/o ells mateixos han après a través de la manipulació de materials i la connexió de processos matemàtics, realitzen càlcul mental.

Aquesta investigació no es realitza a tots els alumnes de 6è d'Educació Primària –nens i nenes d'11 i 12 anys–, sinó que només hi participen 20 alumnes ja que no es requereix d'una mostra tan extensa. La tria d'alumnes és pactada amb els tutors dels dos grups de 6è, seguint els següents criteris; de cada grup-classe (A i B) s'escullen 10 alumnes, dels quals 10 són nens i 10 nenes. Dels 20 alumnes hi ha 8 que es troben en un nivell elevant en matemàtiques, 6 en un nivell intermedi i 6 en un nivell baix (aquests nivells són segons el criteri del professor).

3.3 Eina d'obtenció de dades

Per poder assolir els objectius de la recerca, l'eina d'obtenció de dades utilitzada ha sigut **observacions** a través de gravacions per tal d'analitzar com els alumnes argumenten els processos realitzat per resoldre càlculs mentalment. S'ha optat per seleccionar 9 càlculs; 2 de suma, 2 de resta, 2 de multiplicació i 3 de divisió ja que és difícil que una operació de cada tipus pugui ser resolt de manera natural a través de totes les estratègies esmentades al Marc teòric (vegeu apartat 2.3 Estratègies de Càlcul Mental). Cada càlcul plantejat només porta a ser resolta de manera natural i/o espontània de dos o tres maneres possibles, per tant, és una bona opció optar per un parell o tres de càlculs de cada tipologia.

Els càlculs han set extrets de la pàgina web de Burns (2012) i de les explicacions i demostracions de Parrish (2010).

Abans d'explicar l'eina d'obtenció de dades, nomenaré els càlculs escollits i les possibles estratègies (vegeu resolució de les possibles estratègies a l'Annex I) que poden ser utilitzades pels alumnes ja que són les més naturals i eficaces d'utilitzar en cada cas ja que no requereixen de molts càlculs per ser resoltes.

- En el cas de la suma, s'ha optat per:

  99+17 ja que el fet de treballar amb un nombre acabat en 9 permet que es modifiqui en el seu nombre posterior que serà un nombre acabat en 0 –és a dir el 100– i així poder operar amb més facilitat. Per tant, aquesta suma permet de manera natural ser resolta ***Compensant*** –[(99+1)+(17–1)]– i ***Fent números de referència*** tot transformant el 99 en 100 –[(99+1)+17)]–1–. Paral·lelament, també es pot resoldre a través d'altres estratègies, tot i no ser tant naturals d'utilitzar com les anteriors, ja que requereixen més temps, poden ser útils per alumnes que no tinguin l'habilitat d'utilitzar les estratègies esmentada anteriorment o que simplement els hi funcioni una altra metodologia. És un exemple l'estratègia de ***Descompondre els nombres segons el valor de posició*** –[(90+10)+(9+7)] o [99+(10+7)]–.

  116+118 ja que són dos nombres molt propers entre ells, i augmentat i disminuint unitats als dos nombres, aquests es transformen en el mateix nombre –[(116-1)+(118-3)]-4–. Per tant, permet ***Fer dobles*** amb facilitat. Per altra banda, permet ***Fer números de referència*** ja que el 118 és molt proper a 120 i els nombres que acaben en 0 són nombres de referència/coneguts que donen seguretat i rapidesa a l'hora d'operar –[(118+2)+116]-2–.

  Una altra bona estratègia per resoldre el càlcul 116+118 de manera natural és la de ***Compensar***, és a dir, modificar els dos nombres per tal que un o els dos nombres es transformin en més senzills –[(118+2)+(116-2)]–.

  Paral·lelament també permet que els alumnes, ***Descomponguin els nombres segons el valor de posició*** i operin pas per pas, és a dir, unitats amb unitats, desenes amb desenes i centenes amb centenes, –[(100+100)+(10+10)+(6+8)]–, i que ***Facin deus*** –[(110+110)+(8+2)+4]–.

- En el cas de la resta, s'ha optat per:

  100-18 ja que el fet d'operar amb el nombre 100 facilita que els alumnes puguin resoldre el càlcul sense gaire complexitat perquè només necessiten modificar un nombre per transformar el càlcul en un altre de més senzill. Per tant, aquest càlcul permet ***Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla*** –es transforma el subtrahend en el nombre 20 i així s'obté un nombre acabat en 0 [100-20)+2] –.

  Per altra banda, també permet descompondre el subtrahend i així resoldre el càlcul ***Comptant endarrere*** –[(100-10)-8]–. I de manera natural es pot resoldre ***Sumant***

endavant ja que partint del 18 es sumen les unitats necessàries per arribar al minuend –[(18+2)+80]–.

123–59. A priori és un càlcul amb una certa complexitat ja que els nombres no acaben en 0 ni en 5 i un nombre és més gran que la centena. Però alhora és un càlcul simple ja que el 59 és un nombre molt proper a 60 i per tant és fàcil resoldre'l tot ***Ajustant el nombre per obtenir una resta senzilla*** –[123-(59+1)]+1– i ***Mantenint una diferència constant*** tot modificant el subtrahend a 60 i com a conseqüència d'aquest augment, per mantenir la diferència que hi havia entre els dos nombres, també se li afegeix una unitat al minuend –[(123+1)-(59+1)]–.
La tria d'aquest càlcul també és perquè permet utilitzar l'estratègia de ***Descompondre els nombres segons el valor de posició*** ja que no tothom té l'habilitat de modificar els nombres i establir connexions numèriques mentals i necessiten operar pas per pas, és a dir, descomponent els dos nombres o un –[(100 + 20 + 3)-(50 + 9)] o [(123–50)-9]–.

- En el cas de la multiplicació, s'ha optat per:
  6x25 perquè el número 25 és bastant simple d'operar ja que és ¼ part de la centena i això permet establir connexions numèriques mentals ràpidament. Una de les estratègies que es pot utilitzar de manera natural és l'anomenada ***Fets coneguts i/o nombres de referència*** ja que sabent que 4 vegades 25 és 100 i 2 vegades 25 és 50, ràpidament es pot resoldre el càlcul –[(4x25)+(2+25)]–. Per altra banda, es pot dir que no és un càlcul complex ja que un dels factors és un 6, per tant, no arriba a les desenes, així doncs només cal modificar un dels nombres per transformar la multiplicació en un càlcul més senzill. Per tant, aquest fet suposa ***Descompondre el 25 en factors més petits*** –(6x10)+(6x10)+(6x5)– i/o realitzar la propietat distributiva de la multiplicació –***Productes parcials***– tot descomponent el 25 i multiplicar els dos nombres per 6 –[6x(20+5)]–.
  La tria d'aquest càlcul també va ser perquè permet ***Fer dobles i meitats*** amb facilitat ja que es pot modificar el 25 en un nombre encara més simple d'operar que és el 50 (el doble de 25 és 50) i el 6 en la seva meitat, 3 –[(25x2)x(6:2)]–. A més, la multiplicació 6x25 permet de manera natural **Fer una s*uma iterada*** –25+25+25+25+25+25–.

  12x15 ja que a simple vista sembla un càlcul complex de resoldre perquè els dos nombres són més grans que la desena i no acaben en 0, però establint connexions amb altres nombres, aquests és poden transformar i convertir-se en una multiplicació més simple. El 15 és la meitat de 30 –nombre acabat en 0 més simple d'operar que el 15– i el 12 és el doble de 6 –nombre d'una xifra més simple d'operar que el 12–, per tant, per la resolució d'aquesta multiplicació es pot utilitzar l'estratègia anomenada ***Fer dobles i meitats*** –[(12:2)x(15x2)]–. Per altra banda, si es realitza la connexió que 15 és la meitat de 30 i es tria operar amb ell, el càlcul es simplifica ja que es treballa a partir de ***Fets coneguts i/o nombres de referència*** i permet operar amb més seguretat ja que no són nombres complexes ni desconeguts –[(12x30):2]–.

Aquesta multiplicació també permet que els alumnes descomponguin un o els dos factors i realitzin ***Productes parcials*** –[12x(10+5)]; [(4+4+4)x15]; [(10+2)x(10+5)]–. Paral·lelament, també es pot ***Descompondre els factors en factors més petits*** per simplificar els nombres i operar amb més rapidesa, tot i que aquest procés no és tant natural ni espontani com els esmentats anteriorment ja que requereix de més temps i/o més connexions numèriques mentals entre els nombres –[(6x15)+(6x15)] o [(5x15)+(5x15)+(2x15)] o [(12x5)+(12x5)+(12x5)]–.

- En el cas de la divisió, s'ha optat per:

  23:5 ja que el dividend és un nombres molt proper a 20, per tant, un nombre acabat en 0, i com a conseqüència, un nombre que proporciona seguretat i rapides a l'hora d'operar. I el divisor és un nombres d'una sola xifra i és un dels nombres que amb més facilitat s'aconsegueix operar. Així doncs, es pot realitzar una ***Suma de manera iterada*** –[(5+5+5+5)]– i una ***Resta de manera iterada*** juntament amb un ***Nombre de referència*** –modificant el 23 a 20 i restant la xifra 5 els cops necessaris–. Per altra banda també permet utilitzar l'estratègia de ***Multiplicar*** de manera natural tot multiplicant un nombre al divisor per tal d'obtenir el dividend –[23-(5x4)] –.

  300:15 perquè són dos nombres de referència; el dividend acaba en 0 i el divisor en 5 i permet ser operats amb facilitat i seguretat. A més, el 300 és divisor de 15, per tant, la divisió serà exacte i no serà tan complicada. Una estratègia que pot sortir de manera espontània podria ser la de ***Multiplicar*** –[(15x10)+(15x10)]–. Per altra banda, també permet fer de manera natural ***Divisions parcials*** tot multiplicant el divisor per un nombre conegut i restant-lo del dividend i així consecutivament fins acabar-la –[300-(15x10); 150-(15x10)]–.

920:6 ja que en ser dos nombres parells permet simplificar-los, és a dir, dividir el dividend i el divisor per la mateixa quantitat per crear un càlcul més senzill. Per tant, una bona opció és utilitzar l'estratègia de ***Raonament proporcional*** –[(920:2):(6:2)]–, seguidament es pot realitzar una ***Divisió parcial*** ja que els nombres obtinguts encara són elevats i dividint parcialment els hi pot resultar més simple –[(460-(3x100); 160-(3x50); 10-(3x3)]–. També es pot ***Dividir descomponent*** ja que en descompondre els nombres s'obtenen xifres acabades en 0 i per tant, els hi és molt més simple d'operar i la complexitat de la divisió es redueix –[(900:6)+(20:6)]–. I utilitzant l'estratègia de ***Multiplicar*** ja que si es multiplica per nombres de referència, el nivell de dificultat és redueix i permet resoldre un càlcul amb molta agilitat i sense haver de retenir molts nombres a la ment a causa de la quantitat de càlculs a realitzar –[(6x100)+(6x50)+(6x3)]–.

Com s'ha argumentat anteriorment, l'eina d'obtenció de dades són observacions als alumnes, a través de gravacions, amb la intenció de comprendre els processos mentals que realitzen quan calculen mentalment, si els saben explicar i quins són els errors més rellevants que realitzen. Per disposar d'aquesta informació s'han elaborat un qüestionari amb tres preguntes idèntiques per a cada càlcul:

Pregunta 1: Quin resultat obtens quan "sumes *99+17"*?
Pregunta 2: Com saps que és aquest el resultat?
Pregunta 3: Ho sabries resoldre d'una altra manera? Quina/es?

La pregunta 1 és una pregunta oberta que porta a que els alumnes resolguin el càlcul mentalment de la manera que ells vulguin, per tant, cada alumne utilitzarà el mètode que més fàcil sigui per a ell i/o que se senti més còmode ja que serà un procés matemàtic que sorgirà de manera espontània. La pregunta 2 es realitza ja que interessa saber com saben que és aquell resultat i no un altre. Aquest és el moment d'explicar el procés mental que realitzen per obtenir aquell resultat i es podrà comprovar si tenen adquirit el valor de posició, si troben relacions entre els nombres i quins són els errors comesos amb més freqüència.
La pregunta 3 es realitza ja que interessa saber si els alumnes són capaços de resoldre un mateix càlcul utilitzant un altre mètode i el saben explicar o si només saben utilitzar i explicar el que els hi surt de manera natural sense haver de fer més connexions entre els nombres.

Abans de realitzar les preguntes als alumnes per tal de començar amb la recerca, es va realitzar una prova pilot a un alumne de la mateixa edat però d'un altre centre educatiu per comprovar que l'eina de recerca era correcte i funcionaria per tal d'assolir els objectius de recerca. Gràcies a aquesta vaig poder realitzar un petit canvi que me va semblar que milloraria a l'hora de transcriure les dades de les gravacions; es va crear una nova columna per tal d'anotar *altres notes* interessants que podien servir per a la recerca.

3.4 Obtenció de dades

Abans d'iniciar-nos en l'obtenció de dades, cal dir que es va elaborar una autorització dels drets d'imatge per tal que el pare/mare/tutor firmés ja que s'havia d'estar segur que tots els alumnes amb els quals es volia treballar tenien permís per ser gravats i/o ser retratats (vegeu Annex II). Tot i així, no va ser necessari ja que se'ns va informar que tots els alumnes ja tenien dret d'imatge. També, es va realitzar dos reunions amb el professorat dels alumnes de la mostra escollida per explicar què es volia realitzar, quins eren els objectius de la recerca, quina era la metodologia emprada, com se'ls podria ajudar en la seva tasca educativa gràcies als resultats, etc.

Els docents que formen part de l'equip directiu ens van assignar l'espai del menjador per poder realitzar les gravacions ja que és un espai molt tranquil i d'aquesta manera s'aconseguiria que no se'ns destorbes i així obtenir amb més facilitat les dades necessàries. S'hi va assistir dos divendres de 9h a 12.30h –el dia 17 de febrer de 2017 es van realitzar les gravacions de manera individual als deu alumnes de 6è A i el dia 24 de febrer de 2017 es va realitzar el mateix però amb el grup de 6è B–.

Els alumnes, d'un en un, entràvem al menjador, seien a una cadira i se'ls hi explicava que seguidament se'ls mostraria 9 cartronets amb un càlcul a cada un (vegeu càlculs a l'Annex III), se'ls realitzaria tres preguntes que haurien d'intentar resoldre i durant tot el procés de resolució d'aquests serien gravats per tal de poder-ho analitzar a posteriori. Per tant, en començar amb la gravació se'ls va ensenyar un cartronet, es va dir el càlcul en veu alta, es van realitzar les tres preguntes pausadament i al ritme de l'alumne, i així repetitivament fins que s'havia treballat amb els 9 càlculs.

3.5 Procés d'anàlisi de dades

El procés d'anàlisi de dades consta de dues parts diferenciades: la primera d'elles és la transcripció de les gravacions que es van realitzar en la prova oral per comprendre les connexions que realitzaven amb els nombres, i la segona part és la informació recollida en diferents graelles per tenir agrupats per càlculs totes les respostes dels alumnes i poder fer una anàlisi més detallat.

Per tal d'analitzar les dades va ser necessari disposar d'una graella per plasmar tot el que van argumentar oralment els alumnes. El procés d'anàlisi de dades no es va realitzar al mateix moment sinó que es va fer a posteriori ja que interessava que en el moment d'obtenció de dades es pogués estar atent al que deien els alumnes i s'aconseguís establir un diàleg fluït entre l'alumne i l'entrevistador i no es convertís en una entrevista de caire forçat.

Per transcriure les dades es van elaborar nou graelles (del tipus *Graella 1*), una per cada càlcul; cada graella contenia 20 files –ja que la mostra era de 20 alumnes– i set columnes –nom, resultat: correcte o incorrecte, sap explicar l'estratègia, estratègia utilitzada, errors i altres notes–. La graella utilitzada es pot observar a la Figura 1, on hi ha un exemple de dades transcrites (vegeu dades transcrites a l'Annex IV).

Operació: 99+17						
NOM	**Resultat: Correcte (C) Incorrecte (I)**	**Sap explicar estratègia? Si/No**	**Estratègia utilitzada**	**Altres estratègies**	**Errors**	**Altres notes**
1.	Correcte	*Sí*	*Compensar* *Al 99 li sumo 1 del 17 i queda 100 i al 17 li trec un i queda 16.* S'ha traduït a: *99 + 1 = 100* *17 - 1 = 16* *100 + 16 = **116***	*Descompondre un nombre segons el valor de posició* *El 17 és 10 i 7. Al 99 li sumo 10 i dóna 109 i després li sumo 7. I el resultat és 116.* S'ha traduït a: *99 + 10 = 109* *109 + 7 = **116***		En veure l'operació escrita em diu el resultat directament i després m'explica l'estratègia.

Figura 1. *Graella 1* del càlcul 99+17 per transcriure les dades de les gravacions.

A posteriori es va elaborar una altra graella per poder analitzar les dades (vegeu Figura 2. *Graella 2*). Per cada càlcul es va elaborar la *Graella 2* i a cada una es tenia en compte quines estratègies s'utilitzaven i l'explicació numèrica d'aquesta, quants alumnes l'utilitzaven, quants alumnes la resolien correctament o incorrectament, si sabien explicar l'estratègia utilitzada i el percentatge d'alumnes que l'utilitzaven (vegeu *Graella 2* de tots els càlculs realitzats a l'Annex V).

Quan es va disposar de tota la informació ordenada es va poder realitzar quatre gràfics de barres tenint en compte tots els càlculs realitzats; un referent al resultat, és a dir, de cada càlcul es va analitzar si el resultat era correcte, incorrecte o si no havien contestat. Un altre gràfic referent a si sabien explicar l'estratègia utilitzada –si, no, no contesten-. El tercer gràfic referent només als alumnes que havien resolt correctament els càlculs plantejats per tal d'analitzar si sabien explicar l'estratègia utilitzada o no, i un últim gràfic només fent referència als alumnes que van resoldre els càlculs incorrectament per tal de saber si sabien explicar l'estratègia utilitzada o no.

Paral·lelament, individualment, de cada càlcul plantejat es va elaborar un gràfic de barres en relació a les estratègies utilitzades tot mostrant quants alumnes les van utilitzar –i quants de manera correcte/incorrecte–. De manera visual es pot observar quina és l'estratègia que es va utilitzar més, per tant, quina és l'estratègia que els alumnes se senten més còmodes utilitzant i amb quina produeixen més errors (vegeu apartat 4. Resultats i anàlisi dels resultats).

Només s'han analitzat les dades obtingudes de la primera i segona pregunta, ja que la quantitat d'informació no era assumible per un treball d'aquesta magnitud. S'ha analitzat la primera estratègia utilitzades pels alumnes perquè creiem que és la que els hi surt espontàniament, per tant, per ells la més eficaç.

99 + 17	**Estratègia**	**Explicació**	**Quants alumnes l'utilitzen?**	**Resultat**	**Alumnes**	**Han explicat l'estratègia?**	**%**	**Quants alumnes l'utilitzen com a segona opció?**
	Compensar	99 + 1 = 100 17 - 1 = 16 100 + 16 = **116**	14	Correcte	13	Sí	Total: 70% Correcte: 92.85% Incorrecte: 7.14%	
				Incorrecte	1	Sí		
	Descompondre segons el valor de posició	99 + 10 = 109 109 + 7 = **116** 90 + 10 = 100 9 + 7 = 16 100 + 16 = **116**	3	Correcte	2	Sí	Total: 15% Correcte: 66.6% Incorrecte: 33.3%	7
				Incorrecte	1	No		
	Fer números de referència	99 + 1 = 100 100 + 17 = 117 117 – 1 = 116	1	Correcte	1	Sí	Total: 5% Correcte: 100% Incorrecte: 0%	
				Incorrecte	0			
	Algoritme tradicional	99 -17 116	2	Correcte	0		Total: 10% Correcte: 0% Incorrecte: 100%	

Figura 2. *Graella 2* d'anàlisi del càlcul 99+17.

4. Resultat i anàlisi dels resultats

A continuació es presenten els resultats de les dades obtingudes en forma de gràfics de barres seguit de la seva explicació i anàlisi. Es pot observar un gràfic de barres i l'anàlisi d'aquest per cada càlcul, i quatre gràfics de barres en relació a tots els càlculs de manera global tenint en compte si s'han resolt de manera correcte o incorrecte i si s'ha sabut explicar l'estratègia utilitzada o no.

4.1 Anàlisi dels resultats –99+17–

Després d'observar el gràgic de barres de la Figura 3, es pot dir que hi ha un percentatge molt elevat d'alumnes que resolt correctament el càlcul 99+17 –80%– i un percentatge minoritari que el resolt incorrectament –20%–. S'han utilitzat 3 estratègies de càlcul, que són *Compensar*, *Descompondre* i *Fer números de referència.* També s'ha resolt a través de l'*Algoritme tradicional*. Es pot observar clarament que la més utilitzada és la de *Compensar* –70% d'alumnes l'han utilitzat i només un 7.14% l'ha utilitzat de manera incorrecta–, i l'estratègia que s'ha utilitzat menys ha sigut Fer números de referència –5% d'alumnes l'ha utilitzat–, seguidament de l'*Algoritme tradicional* –10% d'alumnes l'ha utilitzat i el 100% d'aquests l'ha resolt de manera incorrecta–.

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 4, el 100% d'alumnes que utilitzen l'estratègia de *Compensar* sap explicar l'estratègia utilitzada encara que el resultat sigui incorrecte, de la mateixa manera que l'alumne que fa *Números de referència*. Paral·lelament, un 66.6% d'alumnes que han utilitzat l'estratègia de *Descompondre* saben explicar la metodologia utilitzada per resoldre el càlcul però el 100% d'alumnes que l'han resolt mitjançant l'*Algoritme tradicional* no.

Com s'ha esmentat anteriorment, hi ha una quantitat minoritària d'alumnes que no utilitzen cap estratègia de càlcul, sinó que resolen el càlcul mitjançant l'*Algoritme tradicional*, tot imaginant-se mentalment el càlcul escrit al full de paper. Aquests alumnes tarden uns segons més que els alumnes que utilitzen estratègies de càlcul mental i realitzen petits errors ja que han de retenir moltes xifres a la ment –no tenen en compte que el resultat de 9+7 és 16 enlloc de 6–.

És una evidència que l'estratègia amb la que els alumnes es senten més còmodes per treballar és la de *Compensar* i és un gran èxit que quasi bé tots l'utilitzin correctament. Els errors comesos són diversos. Per una banda, hi ha algun alumne que ha volgut *Descompondre* i en començar a realitzar el càlcul ha restat enlloc de sumar –aquest alumne no sap explicar per què li dóna aquell resultat ja que argumenta que no sap que ha fet però percep que hi ha alguna cosa errònia–, i un altre error realitzat en aquesta estratègia és el fet de no sumar les desenes. Per tant, es pot dir que probablement els errors comesos han sigut a causa d'un descuit i no per falta d'habilitats de càlcul.

És un triomf que la gran majora puguin explicar els passos seguits per resoldre el càlcul ja que això indica que entenen el que fan, i realitzen connexions numèriques. Hi ha un grup –el que no resolt el càlcul correctament– que no ha sabut explicar per què el càlcul donava el resultat que deien –aquests són els alumnes que utilitzen l'*Algoritme tradicional*–.

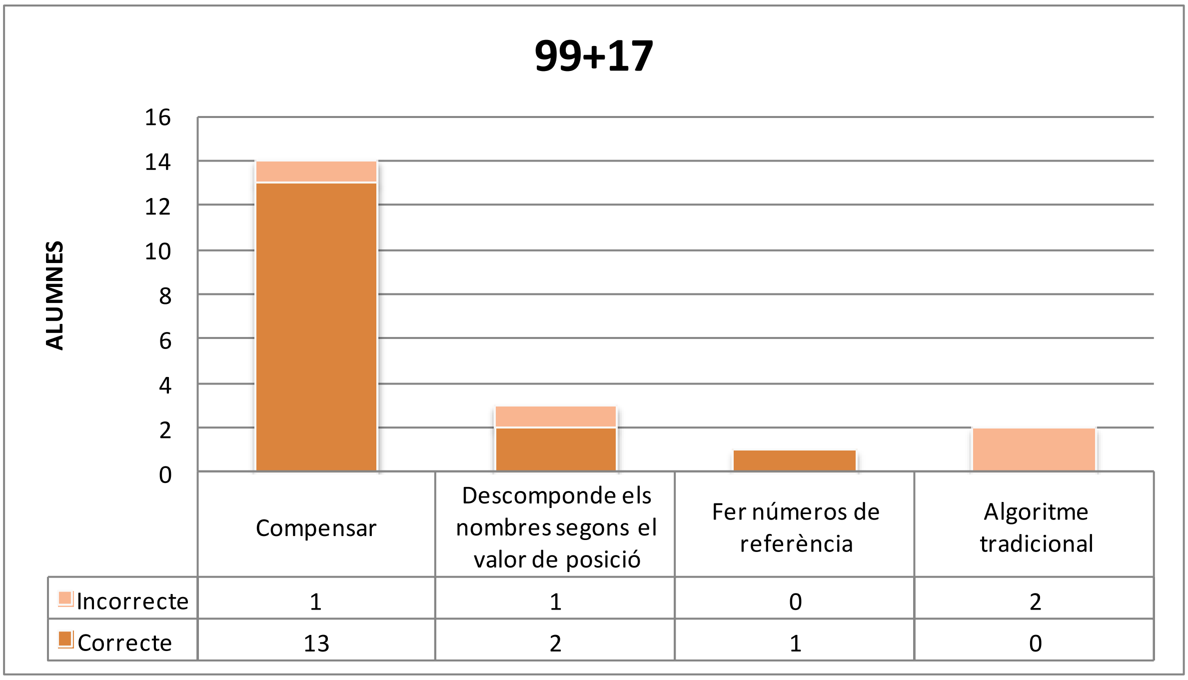


Figura 3. Gràfic de barres dels resultats de la suma 99+17.

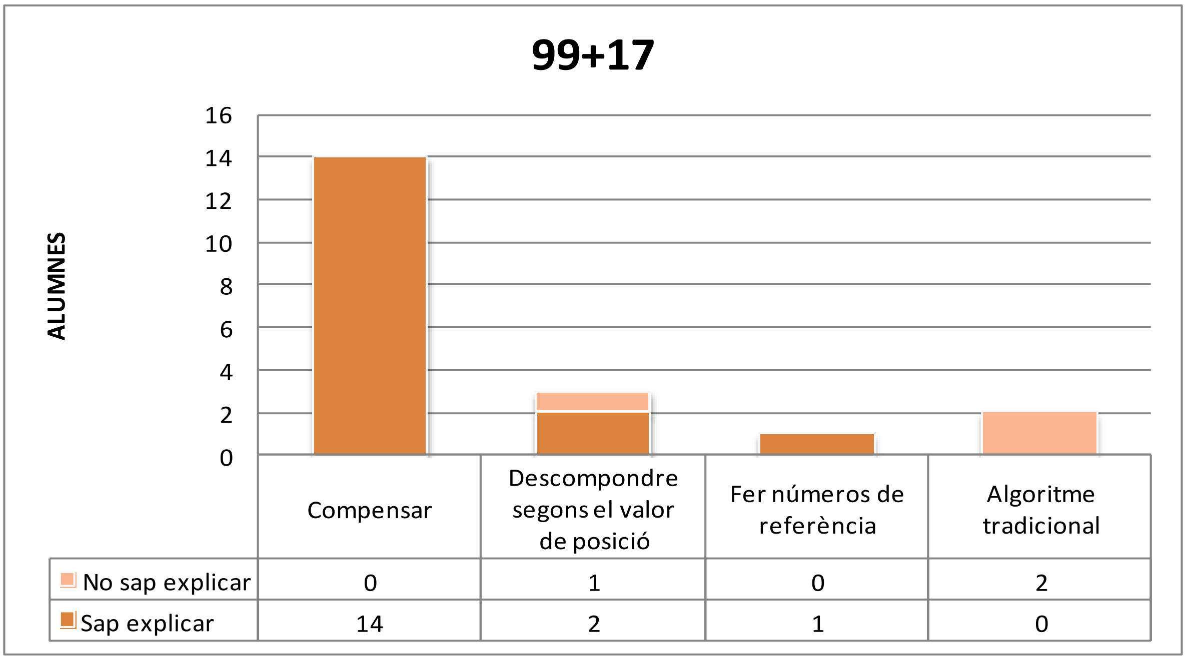


Figura 4. Gràfic de barres dels resultats de la suma 99+17.

4.2 Anàlisi dels resultats –116+118–

Després d'observar el gràfic de barres de la Figura 5, es pot dir que hi ha un percentatge molt elevat d'alumnes que resolen el càlcul 116+118 correctament –85%– i un percentatge minoritari que el resolt incorrectament –15%–. S'han utilitzat 3 estratègies de càlcul, que són *Descompondre*, *Compensar* i *Fer dobles.* També s'ha resolt a través de l'*Algoritme tradicional*. Es pot observar clarament que la més utilitzada és la de *Descompondre* –60% d'alumnes i només un 16.6% l'ha utilitzat de manera incorrecta–, i l'estratègia que s'ha utilitzat menys ha sigut la de *Compensar* –5% d'alumnes–, seguidament de l'*Algoritme tradicional* –15% d'alumnes i d'aquests un 66.6% d'alumnes l'han resolt de manera correcta–.

Es pot observar clarament, al gràfic de barres de la Figura 6, que tots els alumnes saben explicar el procés seguit per tal de resoldre el càlcul plantejat excepte quan el resolen a través de l'*Algoritme tradicional* –el 100% d'alumnes no saben explicar el passos seguits–.

A diferència de la suma anterior –99+17–, els alumnes se senten menys còmodes a l'hora d'utilitzar l'estratègia de *Compensar* i més còmodes amb la de *Descompondre els dos nombres segons el valor de posició*. Els alumnes mostren més seguretat descomponent ja que és un càlcul amb uns nombres bastant elevats ja que superen la centena i per tant, la majoria d'alumnes han escollit descompondre els nombres i realitzar els càlculs tranquil·lament, sumant aïlladament les centenes, desenes i unitats.

És un èxit que tots els alumnes que han utilitzat estratègies de càlcul, encara que no les hagin resolt del tot bé, sàpiguen argumentar per què han utilitzat aquella estratègia i no una altra, quins són els passos seguits per arribar a obtenir el resultat i a més, saben explicar-ho de diferents maneres. Contràriament, hi ha tres alumnes que utilitzen l'*Algoritme tradicional* per resoldre el càlcul i dos d'aquests obtenen el resultat correcte però posteriorment no saben explicar per què els hi dóna aquell resultat; no tenen arguments per explicar-ho.

Els alumnes que han resolt el càlcul erròniament és perquè a l'hora de realitzar la suma final s'obliden d'algun nombre o en canvien algun. És interessant comprendre que gràcies a les explicacions que realitzen els alumnes en relació al procediment emprat per resoldre el càlcul, els hi serveix per rectificar el resultat que a priori diuen. És en aquell moment quan s'adonen que s'han equivocat i el rectifiquen –autoavaluació–.

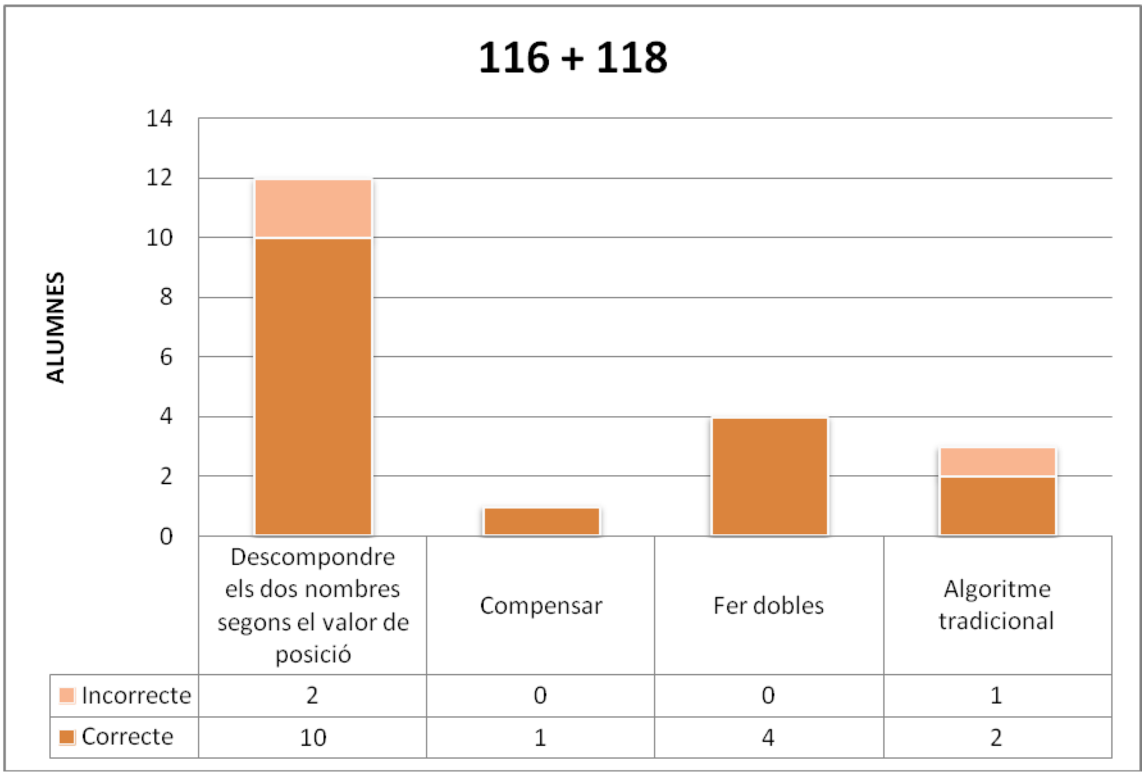


Figura 5. Gràfic de barres dels resultats de la suma 116+118.

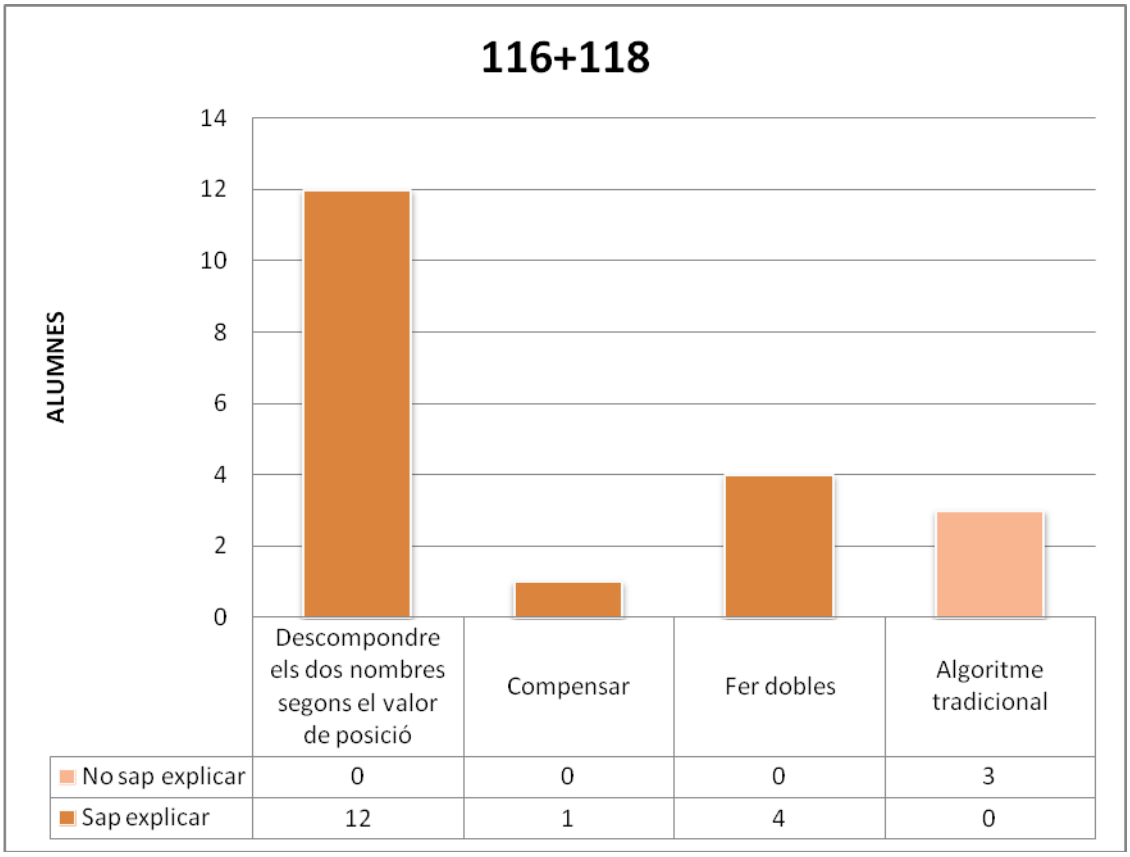


Figura 6. Gràfic de barres dels resultats de la suma 116+118.

4.3 Anàlisi dels resultats –100-18–

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 7, hi ha un percentatge molt elevat d'alumnes que resolen el càlcul 100-18 correctament –90%– i un percentatge minoritari que el resolt incorrectament –10%–. S'han utilitzat 2 estratègies de càlcul, que són *Comptar endarrere* i *Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla.* També s'ha resolt a través de l'*Algoritme tradicional*. Es pot observar clarament que la més utilitzada és la de *Comptar endarrere* –75% d'alumnes l'han utilitzat i de manera correcta–, i el mètode que s'ha utilitzat menys ha sigut la resolució del càlcul a través de l'*Algoritme tradicional* –10% d'alumnes, dels quals un 50% l'han resolt de manera correcta–.

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 8, el 85% de l'alumnat sap explicar els passos seguits per resoldre el càlcul plantejat i el 15% tenen dificultats i/o no ho saben explicar. El 100% d'alumnes que utilitzen l'estratègia de *Comptar endarrere* sap explicar l'estratègia utilitzada, el 66.6% d'alumnes que utilitzen l'estratègia d'*Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla* també i el 100% d'alumnes que resolen el càlcul a través de l'*Algoritme tradicional* no.

A l'hora de realitzar aquest càlcul la gran majoria dels alumnes se senten més còmodes utilitzant l'estratègia de *Comptar endarrere* ja que és bastant simple d'utilitzar i no requereix de gaires càlculs, cosa que porta a que no hi hagin tants errors. Així doncs, es pot dir que els alumnes entenen en quins moments és més útil utilitzar una estratègia o una altra i tot els alumnes saben argumentar per què l'han utilitzat i quins són els passos que han de seguir per resoldre-la. Per altra banda hi ha una minoria d'alumnes que utilitzen altres mètodes –*Algoritme tradicional*– però per la realització d'aquest càlcul no els hi resulta tan eficaç ja que hi ha més probabilitats d'errar –s'han de realitzar més càlculs i això requereix més atenció a l'hora de retenir a la ment tots els nombres que es van obtenint–.

L'alumne que ha utilitzat l'estratègia *d'Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla* i s'ha equivocat amb el resultat és perquè té clar el que ha de fer, és a dir, sap que ha de modificar un nombre per tal de convertir-lo en un de més senzill però quan l'obté ja no sap si l'ha de sumar al minuend o restar, i és en aquest punt on es comencen a produir els errors. Per altra banda, hi ha dos alumnes que utilitzen l'*Algoritme tradicional* per resoldre el càlcul, en aquest cas, hi ha un alumne que el resultat l'obté de manera correcte, això significa que ha realitza correctament l'algoritme però a l'hora d'explicar el procediment emprat argumenta que ha realitzat el càlcul imaginant-se'l escrit en un full de paper. D'aquesta manera no realitzen connexions amb els nombres i tampoc utilitzen la lògica ni estratègies de càlcul que ajuden a calcular més ràpid.

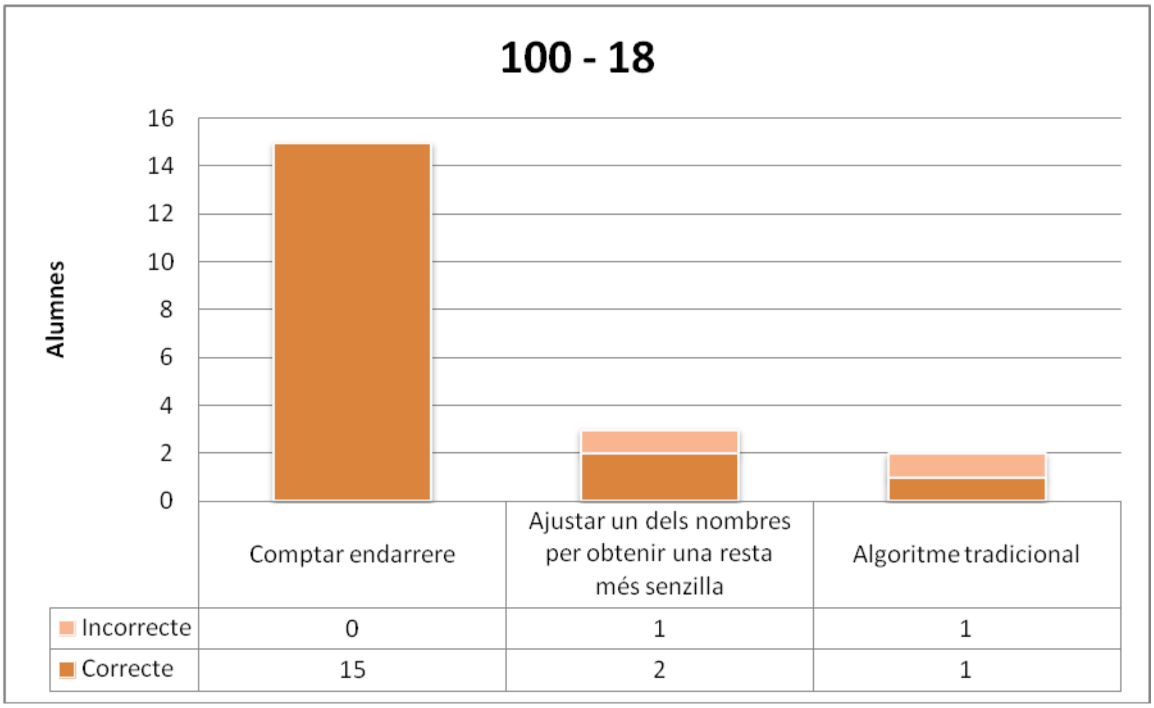


Figura 7. Gràfic de barres dels resultats de la resta 100-18.

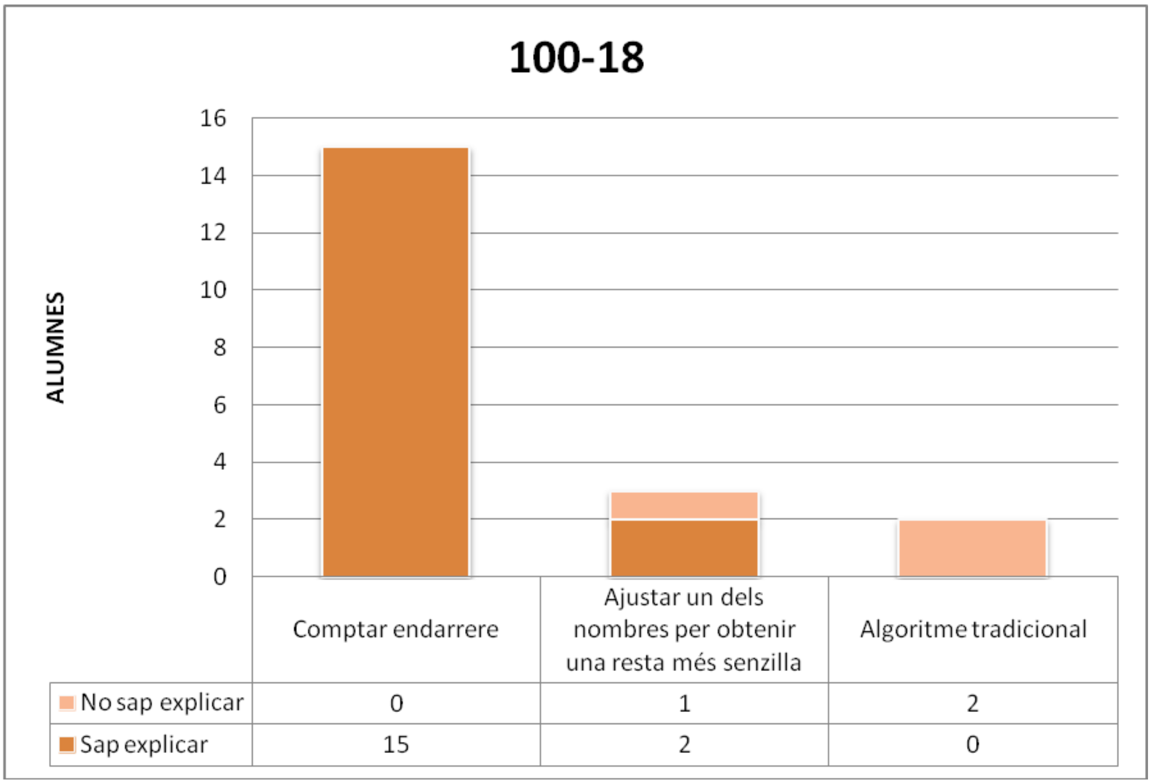


Figura 8. Gràfic de barres dels resultats de la resta 100-18.

4.4 Anàlisi dels resultats -123-59-

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 9, hi ha un percentatge més elevat d'alumnes que resolen el càlcul 123-59 de manera incorrecte –65%– que el percentatge d'alumnes que el resolen correctament –35%–. S'han utilitzat un gran nombre d'estratègies de càlcul, en total 4, que són *Compensar*, *Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla*, *Descompondre segons el valor de posició* i *Mantenir una diferència constant.* També s'ha resolt mitjançant l'A*lgoritme tradicional*. A més, hi ha hagut tres alumnes que no han contestat, és a dir, que no han sabut resoldre el càlcul.

L'estratègia més utilitzada és la de *Descompondre segons el valor de posició* –30% d'alumnes l'han utilitzat però només el 33.3% l'han utilitzat correctament– i l'estratègia que menys s'ha utilitzat ha sigut la de *Mantenir una diferència constant* –5% d'alumnes–.

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 10, el 55% d'alumnes saben explicar els passos seguits per resoldre el càlcul plantejat. La gran majoria d'aquests alumnes són els que han utilitzat l'estratègia d'*Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla* –100% d'alumnes– i de *Descompondre els nombres segons el valor de posició* –83.3% d'alumnes– encara que la solució del càlcul sigui errònia. Per altra banda, el 100% d'alumnes que han resolt el càlcul mitjançant l'*Algoritme tradicional*, no han sabut explicar els passos seguits per la seva resolució.

Un dels grans errors en aquest càlcul és el fet de realitzar l'estratègia de *Compensar* ja que és una estratègia de la suma i no es pot generalitzar a altres operacions. Aquest fet indica que hi ha alumnes que no han treballat correctament aquesta estratègia i no entenen el seu significat, per tant, tenen dificultats en explicar la raó per la qual l'han escollit i mostren problemes en explicar la metodologia emprada. També s'han realitzat errors a l'hora de modificar els dos nombres per tal de simplificar el càlcul ja que ho realitzen correctament però en finalitzar-lo no tenen en compte les unitats que han afegit o eliminat, i això porta a una solució errònia. Contràriament, hi ha alumnes que si que els tenen presents però no saben si els han de restar o sumar i per tant, no ho realitzen correctament i tampoc saben argumentar amb coherència i seguretat el que s'ha efectuat.

Es pot dir, després d'observar i analitzar els resultats obtinguts, que aquest càlcul ha resultat complicat ja que a part d'haver molts errors en els càlculs hi ha alumnes que no contesten –argumenten que no saben com resoldre'l perquè necessiten un full de paper per realitzar-lo–, i el percentatge d'alumnes que argumenten que s'han imaginat el càlcul com si estigues en un full de paper –utilitzant l'*Algoritme tradicional*– l'han resolt quasi tots de manera incorrecte i no n'hi ha cap que sàpiga argumentar el procediment emprat.

Paral·lelament, és un triomf que encara que no sàpiguen resoldre el càlcul del tot correcte, el percentatge d'alumnes que sap argumentar el que realitzen és bastant elevat –això significa que entenen el que fan però efectuen petits errors de càlcul–.

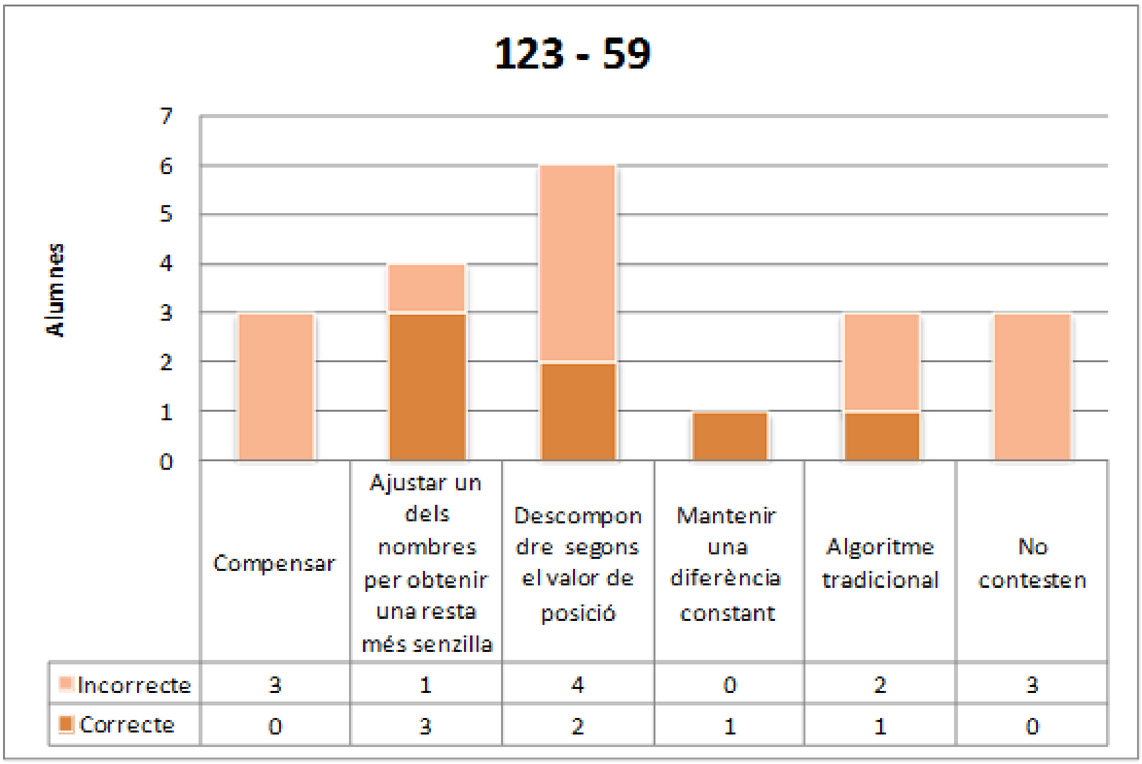


Figura 9. Gràfic de barres dels resultats de la resta 123-59.

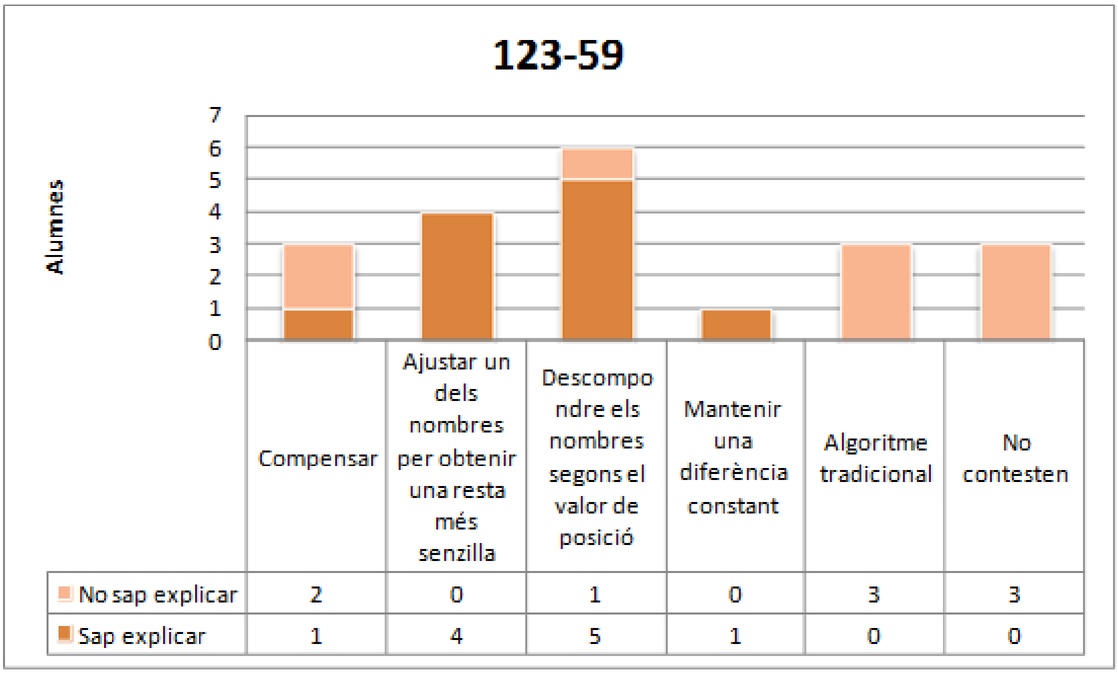


Figura 10. Gràfic de barres dels resultats de la resta 123-29.

4.5 Anàlisi dels resultats –6x25–

Després d'observar el gràfic de barres de la Figura 11, es pot dir que per resoldre el càlcul 6x25 els alumnes han utilitzat 3 estratègies de càlcul, que són *Descompondre els factors en factors més petits*, *Fets coneguts i/o Nombres de referència* i *Productes parcials*. Hi ha hagut dos alumnes que no han utilitzat cap d'aquestes estratègies ja que no han contestat, per tant, es pot dir que no han sabut resoldre'l –argumenten que els hi aniria bé un full de paper i un bolígraf per realitzar-lo. Això fa pensar que no utilitzarien cap estratègia de càlcul sinó l'*Algoritme tradicional*, i mentalment no ho podien realitzar ja que han de retenir masses números a la ment col·locats per ordre–.

El 60% d'alumnes han resolt el càlcul correctament i el 40% restants erròniament. Els alumnes que han coincidit en major quantitat en utilitzar la mateixa estratègia per resoldre el càlcul ha sigut un 60% d'alumnes mitjançant l'estratègia de *Productes Parcials*, dels quals un 41.6% d'alumnes l'han resolt incorrectament i un 58.3% d'alumnes correctament. El 25% han resolt correctament el càlcul a través de l'estratègia de *Fets coneguts i/o Nombres de referència*. Paral·lelament, l'estratègia menys utilitzada ha sigut la de *Descompondre els factors en factors més petits* ja que només l'ha utilitzat un 5% dels alumnes, és a dir, un alumne.

Tal i com s'observa al gràfic de barres de la Figura 12, la gran majoria d'alumnes saben explicar l'estratègia utilitzada –85%–, excepte els alumnes que no contesten quan se li pregunta que expliquin el procediment emprat ja que no saben com resoldre'l.

Per tal de resoldre la multiplicació, no realitzen molts errors de càlcul; l'error que es repeteix més és en l'estratègia de *Productes parcials* ja que hi ha alumnes que no tenen del tot clar el mecanisme de resolució i no realitzen correctament la propietat distributiva –no tenen en compte que el nombre 25 és 20 + 5–, i en altres casos es produeixen errors de càlcul –6 x 5=25 enlloc de 30, etc.–.

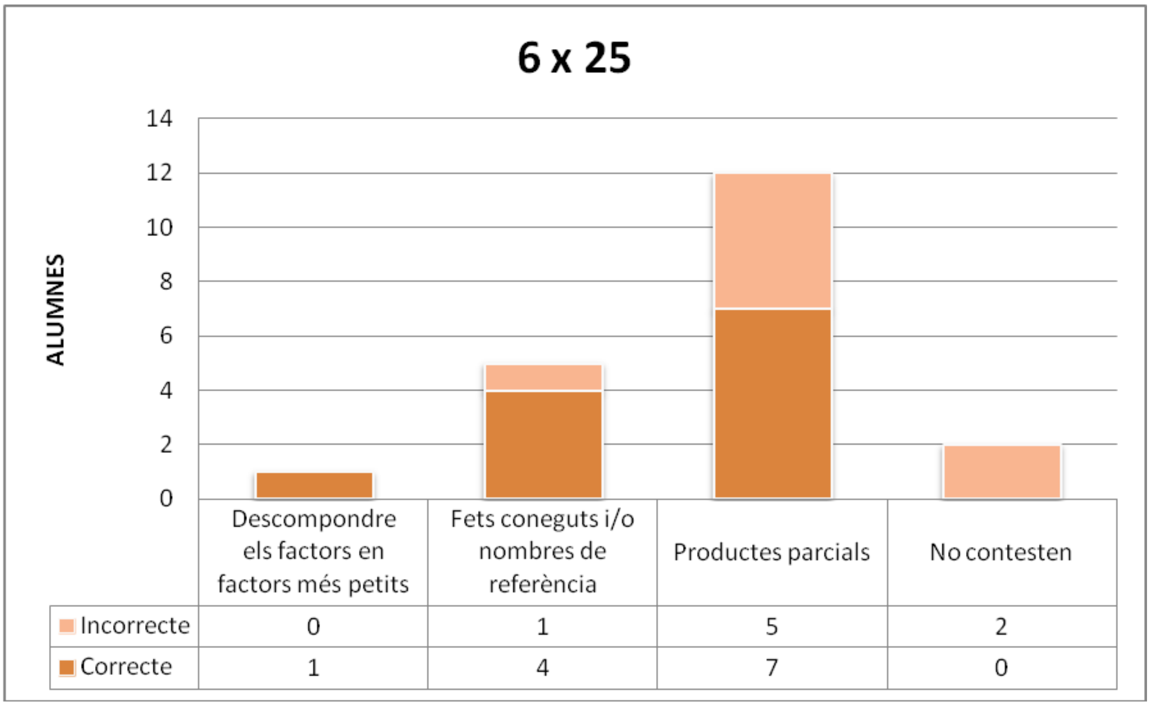


Figura 11. Gràfic de barres dels resultats de la multiplicació 6x25.

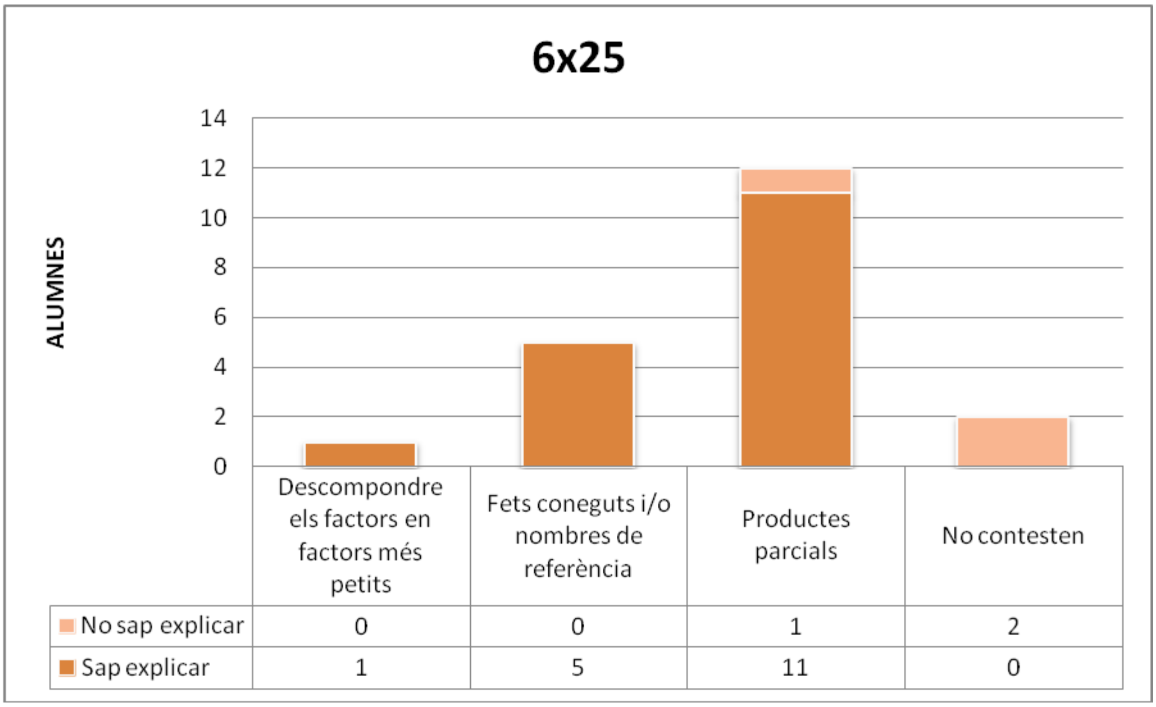


Figura 12. Gràfic de barres dels resultats de la multiplicació 6x25.

4.6 Anàlisi dels resultats –12x15–

La multiplicació 12x15, tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 13, ha resultat bastant complicada pels alumnes ja que més de la meitat l'ha resolt de manera errònia –60% d'alumnes–, dels quals el 75% d'aquests han utilitzat una estratègia i el 25% restant no ha contestat quan se li ha demanat el resultat del càlcul – .

Han utilitzat l'estratègia de càlcul *Productes parcials* i dos alumnes han utilitzat estratègies elaborades per ells. Clarament es pot observar al gràfic de barres que l'estratègia més utilitzada és la de *Productes parcials* –75% d'alumnes; 60% l'han resolt incorrectament i el 40% correctament, però el 53.3% d'alumnes saben explicar l'estratègia, això significa que hi ha hagut alumnes que l'han resolt de manera errònia que han sabut explicar els passos seguits–. Les estratègies que menys s'han utilitzat són les inventades pels alumnes –10% d'alumnes; tots l'han resolt de manera correcta i saben explicar els passos seguits per resoldre el càlcul plantejat–.

Els alumnes trien l'estratègia de *Productes parcials* per resoldre el càlcul ja que per ells és la més còmode i/o més eficaç en aquest cas, però els resultats indiquen que no és tan eficaç ja que la gran majoria d'alumnes no el resolen correctament –això significa que no entenen ben bé el mecanisme de la propietat distributiva–. Els errors realitzats en aquesta estratègia són els de no tenir en compte que el número 12 està formar per la suma del 10 i el 2 i el 15 està format per la suma del 10 i el 5 i que tots els factors s'han de multiplicar entre ells ja que sinó els factors en transformen en altres més petits i el resultat no és el correcte. Tot i així, el nombre d'alumnes que saben explicar la metodologia emprada i els passos realitzats augmenta en comparació amb el nombre d'alumnes que l'han resolt correctament.

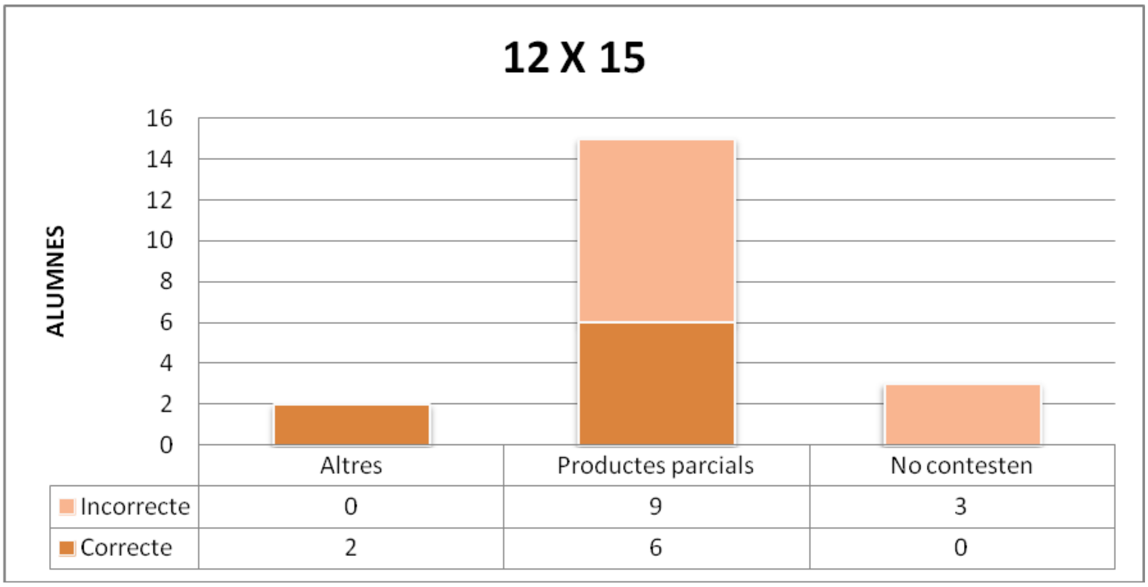


Figura 13. Gràfic de barres dels resultats de la multiplicació 12x15.

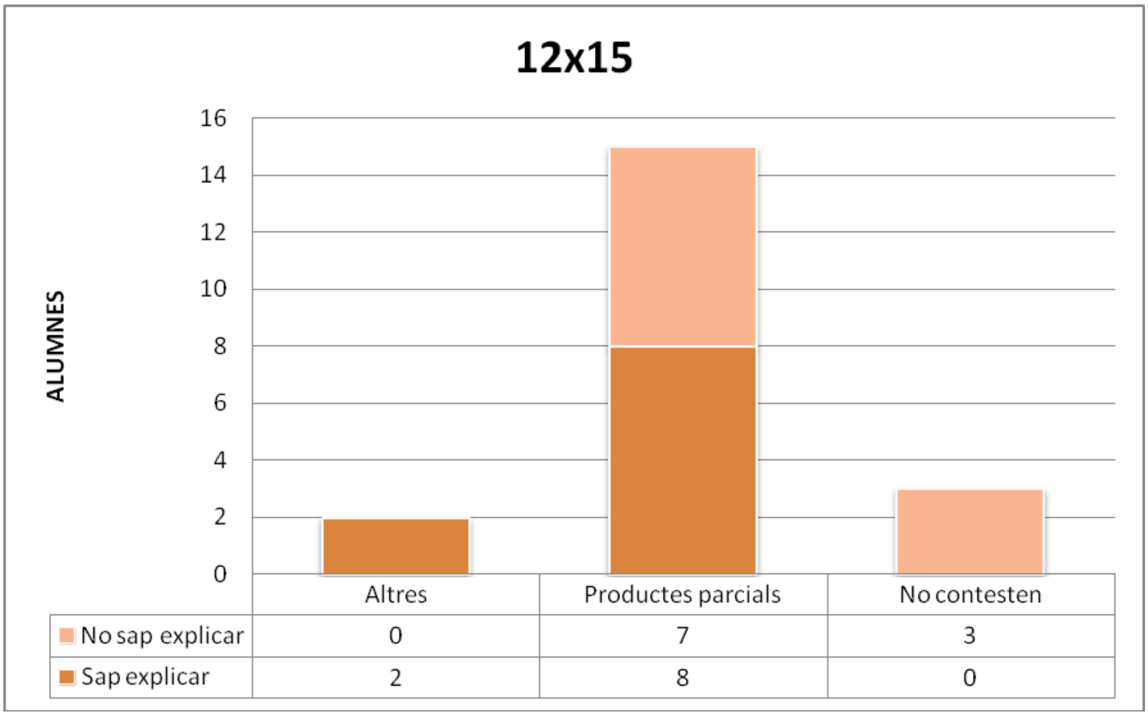


Figura 14. Gràfic de barres dels resultats de la multiplicació 12x15.

4.7 Anàlisi dels resultats –23:5–

Per resoldre el càlcul 23:5, tal i com es pot observar a la Figura 15, els alumnes han utilitzat 3 estratègies de càlcul, que són *Sumar de manera iterada*, *Dividir descomponent* i *Multiplicar*. Hi ha un percentatge bastant important d'alumnes que no han contestat –20%–, això significa que no han sabut resoldre'l.

El percentatge d'alumnes que han resolt el càlcul correcte i els que l'han resolt de manera incorrecte no varia massa, ja que el 55.5% d'alumnes corresponen als que l'han resolt correctament i la resta –45% l'han respost erròniament–.

Clarament es pot observar que l'estratègia més utilitzada és la de *Multiplicar* –utilitzen varis mètodes; potes d'aranya[7], multiplicar per obtenir decimals i nombres enters, etc.– i la gran majoria –72.72% d'alumnes– la resolen correctament. Paral·lelament, l'estratègia menys utilitzada és la de *Dividir descomponent* que només l'utilitzen dos alumnes i la resolen de manera incorrecta –es pot dir que és una estratègia que els alumnes no se senten massa còmodes utilitzant ja que s'utilitza amb molt poca freqüència i de manera errònia. A més, no saben explicar els passos seguits per resoldre-la. Per tant, es pot dir que per realitzar aquest càlcul no és una bona estratègia ja que requereix més temps que altres i molt més esforç i atenció ja que s'ha d'operar amb decimals i és més fàcil de cometre errors–.

Tal i com s'observa al gràfic de barres de la Figura 16, hi ha un percentatge més elevat d'alumnes que saben explicar els passos seguits per resoldre el càlcul –60%– en comparació als que no saben explicar-los –40%–. El 81.81% dels alumnes que han utilitzat l'estratègia de *Multiplicar* han sabut explicar els passos seguits per resoldre la divisió, això vol dir que alguns dels alumnes que no l'havien resolt correctament també han sigut capaços d'explicar tots els passos seguits. Per altra banda, els alumnes que han utilitzat l'estratègia de *Sumar de manera iterada* han sabut explicar els passos seguits, en canvi els que han Dividit descomponent no.

S'entén que aquest càlcul és bastant simple de resoldre ja que només un dels factors supera les desenes i el nivell de complexitat disminueix. Per tant, és d'estranyar que hi hagi alumnes que no sàpiguen, com a mínim, dir el resultat del càlcul però per altra banda, té sentit ja que

[7] Aquesta estratègia consisteix en transformar el dividend en "potes" i repartir el divisor en parts iguals a cada "pota". Si hi ha una xifra que no es pot repartir entre les "potes" significarà que és el residu de la divisió. Per obtenir el resultat només s'ha de tenir en compte totes les xifres que hi ha a una "pota".

aquests són alumnes que per a la resolució de les multiplicacions han tingut problemes o bé no han sabut resoldre-les.

L'estratègia de *Multiplicar* ha sigut tot un èxit ja que la gran majoria d'alumnes l'han utilitzat, això significa que se senten molt còmodes utilitzant aquesta estratègia i entenen com s'utilitza i el per què. Els alumnes que han realitzat errors en la utilització d'aquesta és perquè al ser una divisió entera, no saben com operar amb el residu ja que no els hi dóna exacte. Però al explicar-ho, ells mateixos troben la solució i argumenten que hi ha residu però que poden donar el resultat amb decimal també.

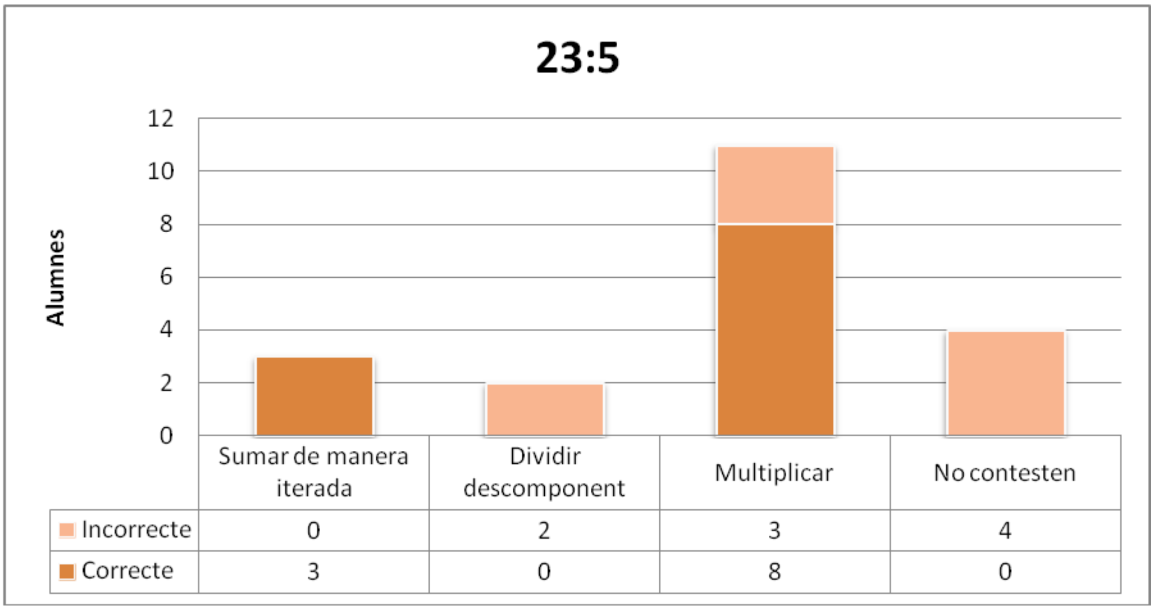


Figura 15. Gràfic de barres dels resultats de la divisió 23:5.

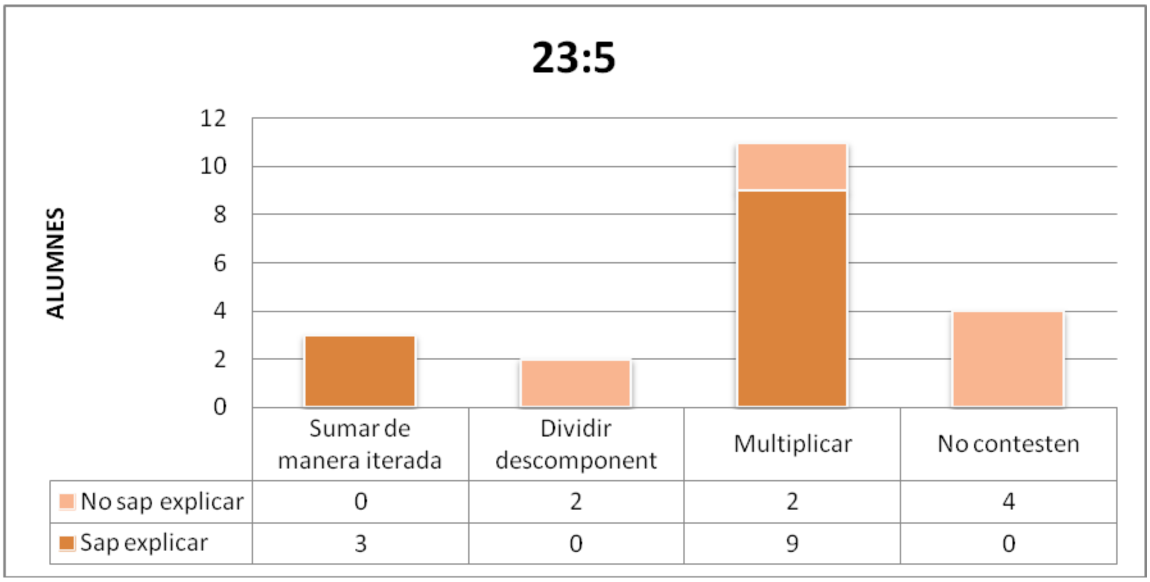


Figura 16. Gràfic de barres dels resultats de la divisió 23:5.

4.8 Anàlisi dels resultats –300:15–

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 17, el 85% dels alumnes resolen el càlcul de manera errònia i hi ha una gran quantitat d'alumnes –41%– que no contesten quan se'ls hi demana si saben resoldre el càlcul mentalment. Altrament, només hi ha un 15% dels alumnes que el resolen de manera correcte, per tant, es pot dir que és minoria.

Per a resoldre el càlcul, els alumnes han utilitzat 2 estratègies de càlcul, que són *Dividir descomponent* i *Multiplicar*. La més utilitzada ha sigut la de *Dividir descomponent* amb un total de 9 alumnes, però s'ha comprovat que no la utilitzen correctament ja que hi ha hagut molts errors de càlcul i gairebé cap alumne l'ha resolt correctament. Aquests són perquè no realitzen de manera correcta l'estratègia ja que descomponen el divisor enlloc del dividend i això porta a que hi hagi l'error de càlcul.

Altres errors en l'estratègia de *Multiplicar* han sigut a causa de descomptar-se a l'hora de sumar resultats o realitzar algun error a l'hora de multiplicar.

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 18, de cada estratègia utilitzada hi ha un nombre més elevat d'alumnes que saben explicar els passos seguits per resoldre el càlcul plantejat –69.23%– que els alumnes que no els saben explicar –30.77%–. Aquestes són unes bones dades ja que hi ha molts pocs alumnes que el resolen correctament però dels alumnes que intenten obtenir un resultat –encara que aquest sigui incorrecte– la gran majoria saben explicar per què realitzen aquella estratègia i no una altra, i per què realitzen aquells càlculs.

És una evidència que la divisió 300:15 els hi és molt complicada de resoldre tot i que hauria de ser més simple pels alumnes ja que el dividend és un nombre acabat en zero i el divisor acabat en 5 –normalment els nombres acabats amb aquestes xifres són nombres de referència pels alumnes–.

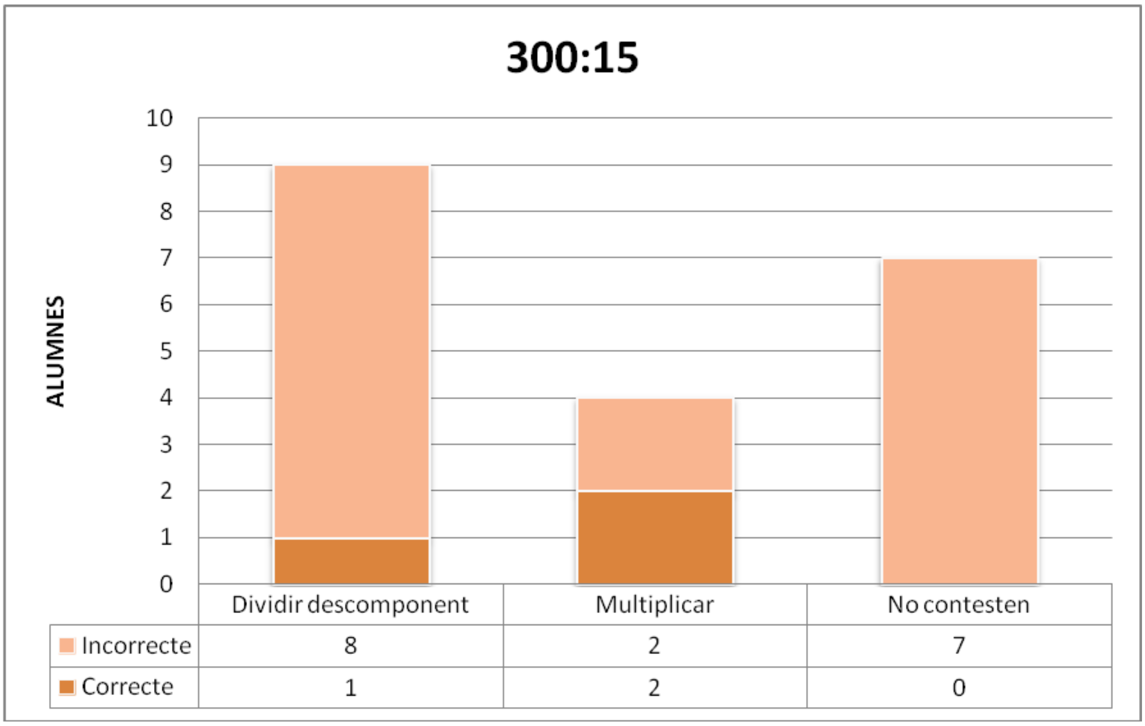


Figura 17. Gràfic de barres dels resultats de la divisió 300:15.

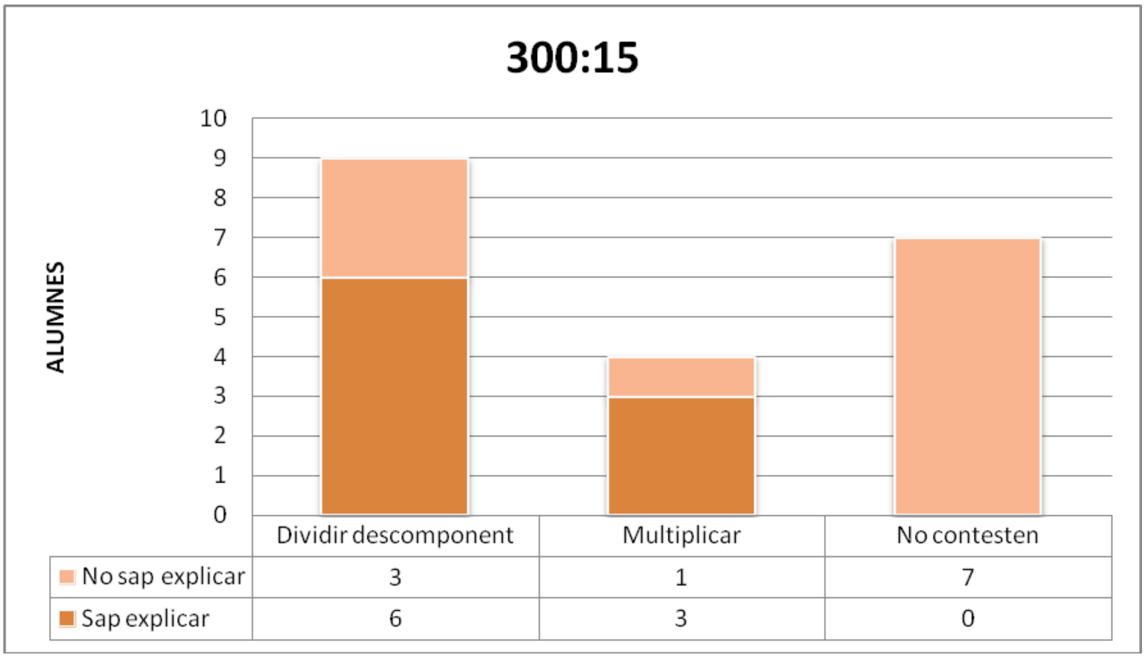


Figura 18. Gràfic de barres dels resultats de la divisió 300:15.

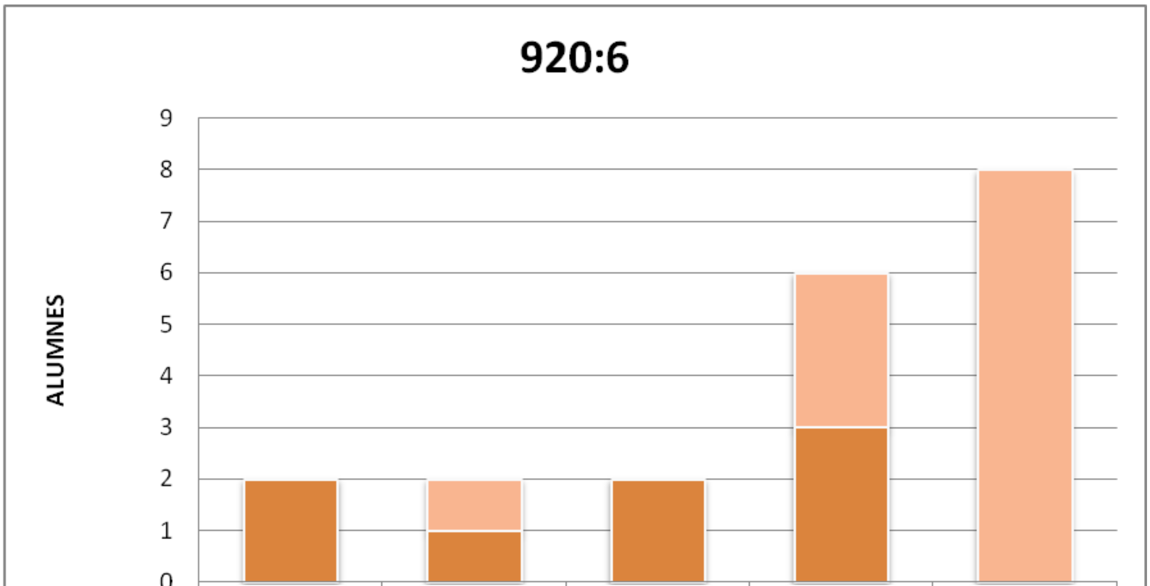
4.9 Anàlisi dels resultats –920:6–

Tal i com es pot observar al gràfic de barres de la figura 19, hi ha un percentatge molt elevat d'alumnes –40%– que no contesten quan se'ls hi demana quin és el resultat del càlcul, per tant, es pot dir que no saben com resoldre'l. Els alumnes que el resolen, utilitzen un total de 4 estratègies de càlcul, que són *Dividir descomponent*, *Raonament proporcional*, *Divisió parcial* i *Multiplicar*. La que s'utilitza més és la *Multiplicar* –30% d'alumnes– seguida de les altres que l'utilitzen un 10% d'alumnes cada una.

Pel que fa al resultat, els alumnes que han resolt el càlcul i de manera correcte en són un 66.7%, per tant, més de la meitat d'alumnes. La *Multiplicació* és l'estratègia més utilitzada però els alumnes realitzen bastants errors ja que només la meitat la utilitzen de manera correcta –el mateix passa a l'estratègia de *Raonament proporcional*–. Per altra banda, els alumnes que realitzen una *Divisió parcial* o *Divisió descomponent* la resolen de manera correcta.

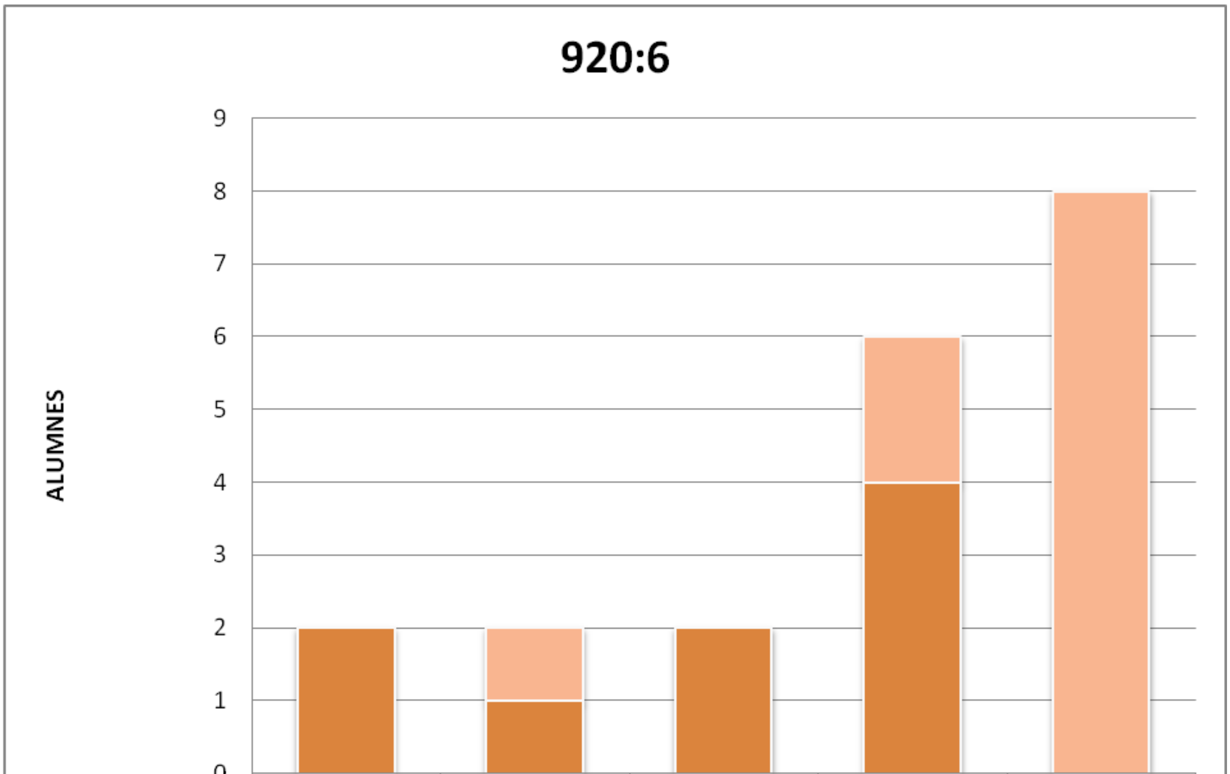
A l'hora d'explicar els passos seguits per resoldre el càlcul, tal i com s'observa al gràfic de barres de la Figura 20, el percentatge d'alumnes comentat anteriorment gairebé no es modifica ja que només saben explicar el 45% dels alumnes. Tot i així, es pot dir que més de la meitat dels alumnes que utilitzen l'estratègia de *Multiplicar* saben explicar el procediment emprat, per tant, es pot entendre que alguns dels nens i nenes que resolen el càlcul erròniament, entenen el que realitzen ja que expliquen els passos seguits per a la resolució del càlcul plantejat. Per altra banda, els alumnes que fan un *Raonament proporcional*, només saben explicar els passos seguits els que han resolt el càlcul de manera correcte, i tots els alumnes que *Divideixen descomponent* i realitzen una *Divisió parcial*, saben explicar el procediment emprat.

És evident que és un càlcul que ha resultat complicat d'executar i s'han realitzat diversos errors. La gran majoria són perquè no s'ha acabat de resoldre el càlcul, és a dir, perquè s'ha deixat l'estratègia a mitges a causa de la complexitat de resolució. Pel que fa als errors de l'estratègia de *Multiplicar* són perquè la majoria d'alumnes no poden acabar de realitzar el càlcul ja que el dividend és un nombre bastant elevant i això fa que hagin de realitzar moltes multiplicacions per aconseguir el 920 i retenir moltes xifres a la ment, i arriba un moment que s'encallen i no saben com continuar.



	Dividir descomponent	Raonament proporcional	Divisió parcial	Multiplicar	No contesten
Incorrecte	0	1	0	3	8
Correcte	2	1	2	3	0

Figura 19. Gràfic de barres dels resultats de la divisió 920:6.



	Dividir descomponent	Raonament proporcional	Divisió parcial	Multiplicar	No contesten
No sap explicar	0	1	0	2	8
Sap explicar	2	1	2	4	0

Figura 20. Gràfic de barres dels resultats de la divisió 920:6.

4.10 Anàlisi dels càlculs globalment

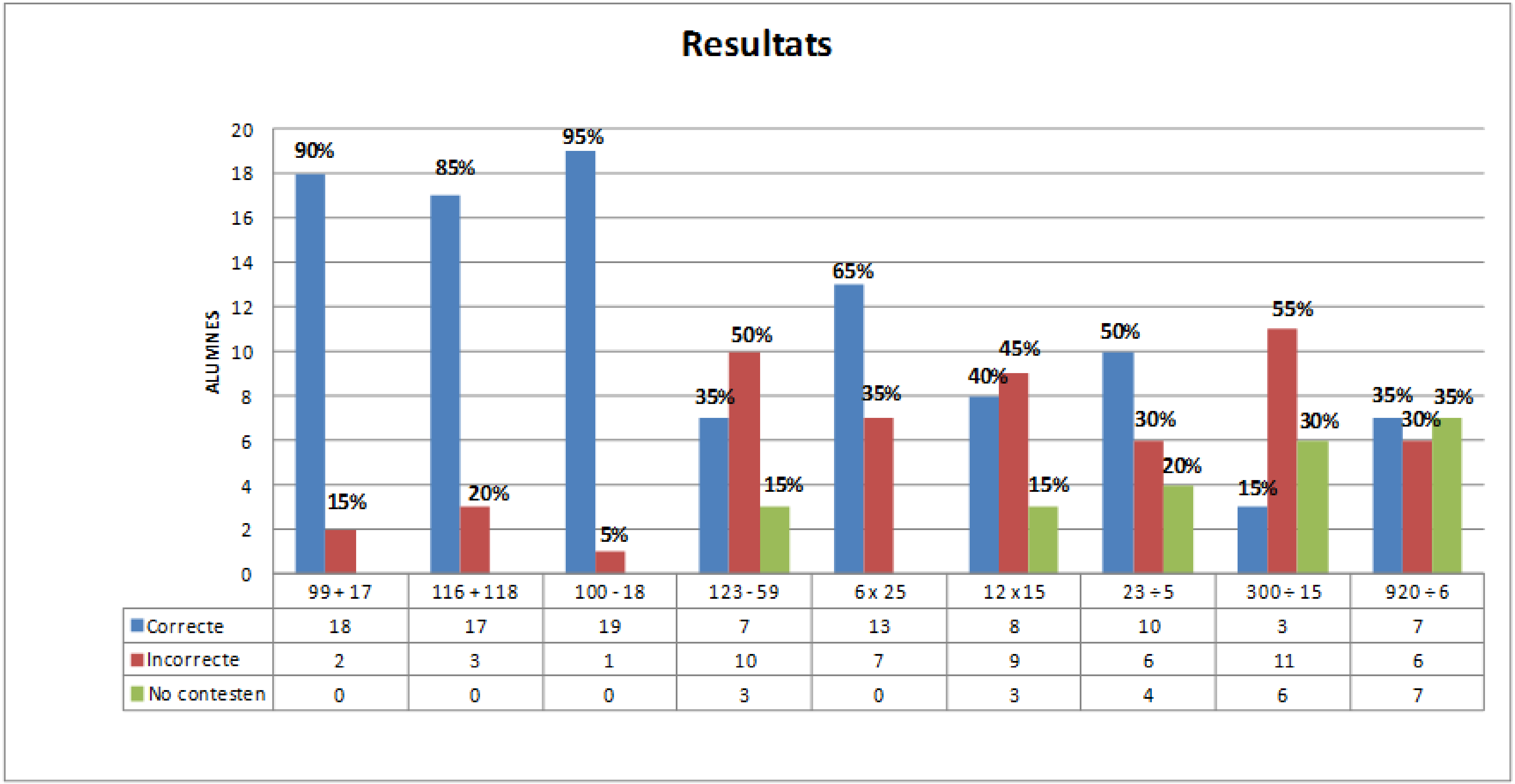
De manera global, tal i com es pot observar al gràfic de barres de la Figura 21, hi ha una clara diferència en relació als resultats dels càlculs plantejats. La gran majoria d'alumnes han resolt els càlculs de **suma** i **resta** de manera correcte –76.25% d'alumnes– i no han presentat quasi bé dificultats, excepte en la resta 123-59 que hi ha hagut un 15% d'alumnes que no han respost quan se'ls hi ha demanat el resultat, un 50% dels alumnes l'han resolt incorrectament i només un 35% dels alumnes l'han resolt correctament. Aquí s'observa que els alumnes han tingut força dificultat en resoldre'l, per tant, hi ha una gran evidència de la manca d'habilitat a l'hora de realitzar restes amb nombres que les seves xifres superen les centenes i no són nombres de referència. Tot i així, es pot observar al gràfic de barres de la figura 22, que en aquest càlcul, tot i resultar complicat de resoldre hi ha un percentatge lleugerament més elevant d'alumnes que saben explicar la metodologia emprada per resoldre el càlcul que no el percentatge d'alumnes que l'han resolt correctament. Això indica que encara que resulti complicat, hi ha alumnes que realitzen errors però entenen i saben que han de fer per resoldre-la.

Pel que fa a la resta de càlculs de **suma** i **resta**, un percentatge molt elevat d'alumnes saben explicar tots els passos seguits–73.75% d'alumnes–, però tot i així aquest percentatge no supera a la quantitat d'alumnes que els han resolt de manera correcte.

En relació a la **multiplicació i a la divisió**, tal i com s'observa al gràfic de barres de la Figura 21, hi ha un percentatge bastant equilibrat d'alumnes que resolen els càlculs de manera incorrecte –48.75%– i els que ho fan de manera correcte –54.25%–. Tot i que en els càlculs 12x15 i 300:15 el percentatge de respostes incorrectes supera a les correctes. Paral·lelament, analitzant el gràfic de barres de les Figura 22, s'observa que en la multiplicació 12x15, un 75% dels alumnes saben explicar els passos realitzats per resoldre el càlcul, per tant, es pot dir que entenen el significat de la multiplicació però durant el procés de resolució hi ha alguna petita equivocació.

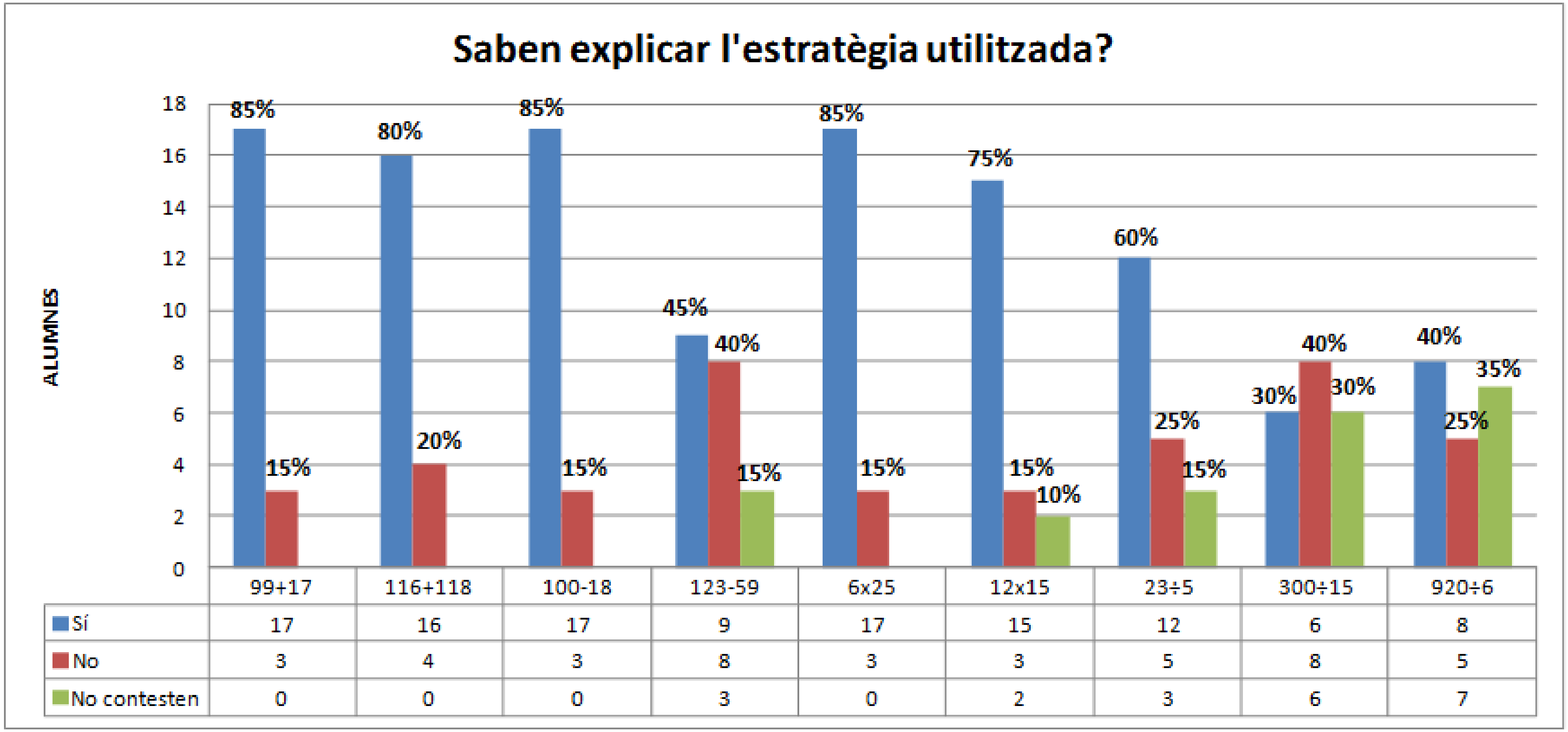
Aquest fet fa entendre que la majoria d'alumnes quan estan operant entenen el que realitzen i estableixen relacions amb els nombres i són capaços d'explicar-ho de manera oral encara que en algun moment del procés s'equivoquin ja que tot el procés és mental i no és fàcil mantenir tots els nombres a la ment. El mateix succeeix en el càlcul 300:15, ja que el nombre d'alumnes que el resole correctament és molt baix i exitosament una quantitat més elevada d'alumnes que utilitzen estratègies de càlcul mental saben explicar l'estratègia utilitzada i la metodologia de resolució encara que aquesta sigui resolta de manera errònia.

Analitzant el gràfic de barres de les Figura 22 es comprova que en les **multiplicacions** i **divisions** aflora molt més el percentatge d'alumnes que saben explicar els passos seguits per resoldre el càlcul –52.5% d'alumnes– que no els que no ho saben explicar –30% d'alumnes–.



	99 + 17	116 + 118	100 - 18	123 - 59	6 x 25	12 x 15	23 ÷ 5	300 ÷ 15	920 ÷ 6
Correcte	18	17	19	7	13	8	10	3	7
Incorrecte	2	3	1	10	7	9	6	11	6
No contesten	0	0	0	3	0	3	4	6	7

Figura 21. Gràfic de barres dels resultats –correcte, incorrecte, no contesten– dels càlculs plantejats.

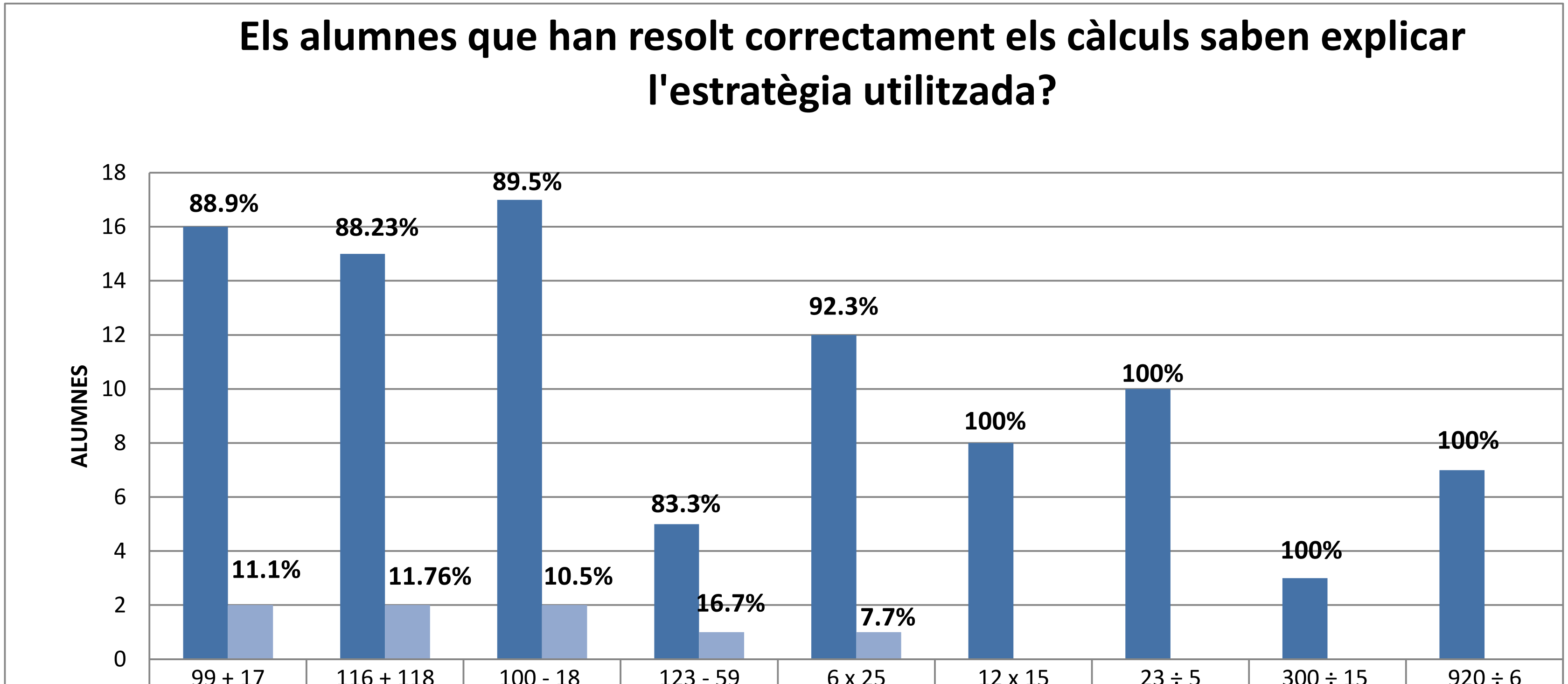


	99+17	116+118	100-18	123-59	6x25	12x15	23÷5	300÷15	920÷6
Sí	17	16	17	9	17	15	12	6	8
No	3	4	3	8	3	3	5	8	5
No contesten	0	0	0	3	0	2	3	6	7

Figura 22. Gràfic de barres dels resultats –saben explicar l'estratègia utilitzada: sí, no, no contesten– dels càlculs plantejats.

En el gràfic de barres de la Figura 23, únicament es centra l'atenció en els alumnes que han resolt els càlculs de manera correcte per tal de comprendre si saben explicar els passos seguits per la seva resolució. Pel que fa a les **sumes** i **restes** el percentatge d'alumnes que resolen els càlculs correctament és gairebé del 100% però en tots hi ha un percentatge –mínim– d'alumnes que no saben explicar els passos seguits, en canvi, pel que fa a les **multiplicacions** i **divisions**, el nombres d'alumnes que resolen els càlculs de manera correcte és inferior però el 100% d'alumnes saben explicar els passos realitzats per a resoldre l'estratègia –excepte en la multiplicació 6x25 que hi ha un 7.7% que no saben explicar–.

En el gràfic de barres de la Figura 24 únicament es centra l'atenció en els alumnes que han resolt els càlculs de manera incorrecte per tal de comprendre si saben explicar els passos seguits per la seva resolució. En relació a les **sumes** i **restes**, tot i que hi ha molt pocs alumnes que les resolen incorrectament, s'observa un lleuger augment en els alumnes que no saben explicar els passos seguits per tal de resoldre el càlcul. Per tant, es pot dir que la majoria dels alumnes que les resolen de manera incorrecte és perquè no saben com resoldre l'estratègia triada ja que tampoc saben explicar com la resoldrien. Pel que fa les **multiplicacions**, es pot dir que el nombre d'alumnes que no resolen els càlculs correctament augmenta però molts dels alumnes saben explicar els passos seguits per resoldre'ls, per tant, és una evidència que els alumnes entenen què significa el terme multiplicació i la relació que han d'establir entre els nombres quan realitzen aquest tipus de càlcul. I en el cas de les **divisions**, es pot dir que el nombre d'alumnes, igual que a les multiplicacions, augmenta en relació als alumnes que resolen els càlculs de manera errònia, però en aquest cas hi ha un nombre molt alt d'alumnes que no sap explicar el procés seguit per a la resolució de l'estratègia –74%–.



	99 + 17	116 + 118	100 - 18	123 - 59	6 x 25	12 x 15	23 ÷ 5	300 ÷ 15	920 ÷ 6
Sí	16	15	17	5	12	8	10	3	7
No	2	2	2	1	1	0	0	0	0

Figura 23. Gràfic de barres dels resultats dels alumnes que han resolt correctament l'estratègia –saben explicar l'estratègia: sí, no– dels càlculs plantejats.

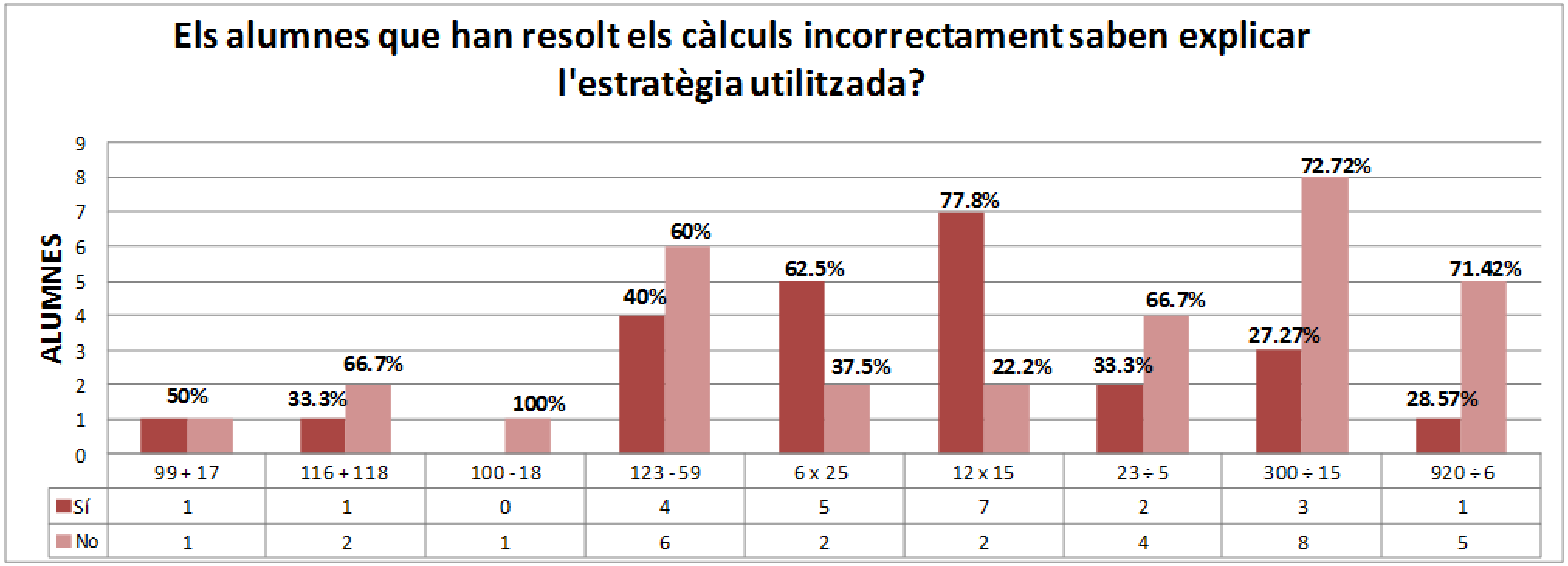


Figura 24. Gràfic de barres dels resultats dels alumnes que han resolt incorrectament l'estratègia –saben explicar l'estratègia: sí, no– dels càlculs plantejats.

5. Conclusions

En aquest apartat es respondrà a la pregunta de recerca plantejada tot explicant les conclusions dels objectius formulats juntament amb unes conclusions globals que sorgiran de tot l'estudi realitzat.

Tal i com es formulava a l'inici del present treball, la pregunta de recerca era la següent:

> "Com calculen mentalment els alumnes de 6è d'Educació Primària d'una escola que no se'ls ha ensenyat l'algoritme tradicional?"

I els objectius que han servit per contestar-la són per una banda, un de general:

- Analitzar les estratègies de càlcul mental que els alumnes utilitzen, i per altra banda tres d'específics

I per altra banda, tres d'específics:

1. Identificar les estratègies de càlcul mental que utilitzen els alumnes.
2. Analitzar les explicacions orals que els alumnes realitzen per tal d'explicar l'estratègia de càlcul mental utilitzada per resoldre el càlcul plantejat.
3. Identificar els errors que realitzen a l'hora d'efectuar els càlculs.

5.1 Conclusions en relació amb l'objectiu específic 1

Pel que fa a l'objectiu específic 1 "Identificar les estratègies de càlcul mental que utilitzen els alumnes", es pot afirmar que s'ha assolit mitjançant el qüestionari realitzat als nens i nenes. A continuació, es presenten les conclusions:

A les sumes, han utilitzat les estratègies de Compensar, Descompondre segons el valor de posició, Fer números de referència i Fer dobles.

S'ha pogut comprovar que hi ha estratègies que han sigut utilitzades amb més freqüència que d'altres però totes elles han resultat molt eficients ja que els alumnes no han realitzat gairebé cap error.

Per una banda, a la suma 99+17, l'estratègia més utilitzada ha sigut clarament la de *Compensar*; tots els alumnes saben com explicar el procés que realitzen i la raó per la qual l'utilitzen, i gairebé tots la resolen correctament. Han optat per realitzar aquesta estratègia ja que el 99 és un nombre molt simple de modificar en un altre de més senzill, és a dir, en un nombre de referència –el 100–, seguidament han de compensar l'altre nombre, traient-li una unitat per tal de poder efectuar el càlcul. Molt semblant és l'estratègia *Fer números de referència* que també han usat en aquest càlcul. Però la diferència és que en aquesta només s'ha de modificar, a priori, un sumand, el 99 per convertir-lo en el nombre de referència 100 i tot seguit realitzar el càlcul. Tot i semblar més fàcil d'executar, pels alumnes no ho és tant ja que no té tant èxit com l'anterior; la causa és perquè en acabar la realització de l'estratègia han de tenir en compte el nombre afegit a causa de la modificació del sumand i restar-li al resultat final.

Per altra banda, l'estratègia més utilitzada a la suma 116+118 és la de *Descompondre els dos nombres segons el valor de posició*. És una estratègia que encara que els alumnes tardin en realitzar-la ja que han de disposar d'un cert temps per efectuar tots els càlculs requerits, se senten segurs i còmodes ja que argumenten el procés seguit amb molta tranquil·litat i seguretat, i no necessiten realitzar preguntes a l'entrevistador per saber que van per bon camí "és així?, si, oi?, etc.". Els alumnes l'han escollit ja que al ser una suma amb uns nombres d'un valor bastant elevat, els hi és més rendible descompondre els dos sumands i operar poc a poc. Una minoria d'alumnes l'han utilitzat en la suma 99+17 ja que no la perceben com a estratègia idònia per resoldre-la a causa el temps requerit i de la quantitat de càlculs a realitzar.

Només a la suma 116+118 els alumnes han ajustat els dos sumands per fer una combinació de *Dobles*, és a dir, aconseguir tenir els mateixos sumands. No és una estratègia ràpida de realitzar ja que s'ha de pensar com ajustar els dos nombres per obtenir la mateixa quantitat, però hi ha alumnes que s'han sentit còmodes podent operar amb els mateixos números.

Així doncs, es poden verificar les afirmacions de Martínez (2011) en relació a la quantitat d'estratègies que utilitzen els alumnes. En aquest cas, es comprova que els alumnes utilitzen un gran ventall d'estratègies, això vol dir que el docent n'ha ensenyat moltes i els alumnes les han pogut treballar fins a tenir adquirides unes habilitats que han anat perfeccionant a la seva conveniència.

***A les restes, les estratègies utilitzades són Comptar endarrere*, *Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla*, *Descompondre segons el valor de posició* i *Mantenir una diferència constant*.**

A la resta 100-18 la gran majoria dels alumnes utilitzen l'estratègia de *Comptar endarrere* i resulta molt eficaç ja que el 100 és un nombre de referència i acabat en 0, fet que els hi permet ràpidament operar només descomponent el subtrahend –[(100-10)-8]–.

El fet d'utilitzar l'estratègia *d'Ajustar un dels nombres per obtenir una resta més senzilla* l'utilitzen pràcticament per resoldre el càlcul 123-59 ja que no són nombre de referència i cal modificar-ne algun per transformar-lo en un càlcul bastant més simple, per tant, opten per ajustar el 59 a 60.

Descompondre segons el valor de posició, és l'estratègia que més alumnes utilitzen en el càlcul 123-59 ja que al ser reconegut com un càlcul complex, opten per realitzar-lo a poc a poc, restant unitats amb unitats, desenes amb desenes i centenes amb centenes.

Per contra, *Mantenir una diferència constant*, és l'estratègia que menys s'utilitza –només a la resta 123-59– ja que aquesta requereix modificar els dos nombres –afegir o treure la mateixa quantitat ambdós nombres–, i pels nens i nenes si no poden obtenir dos nombres de referència directament, opten per ajustar-ne només un i els hi resulta més ràpid la resolució del càlcul.

A les multiplicacions, les estratègies utilitzades són Productes parcials, Descompondre els factors en factors més petits, Fets coneguts i/o números de referència.

L'estratègia que utilitzen més els alumnes és l'anomenada *Productes parcials*; té molt èxit ambdues multiplicacions. La gran majoria d'alumnes opten per escollir aquesta estratègia ja que segurament han treballat moltíssim la descomposició dels nombres i per tant, tenen molta habilitat en descompondre, i la perceben com una estratègia de càlcul efectiva que els porta a resoldre les multiplicacions correctament.

Per resoldre la multiplicació 6x25, la majoria d'alumnes han realitzat dos càlculs, 6x20 i 6x5, però ja en la multiplicació 12x15, els alumnes han utilitzant més variants. N'hi ha que han descompost un factor i han realitzat la propietat distributiva de la multiplicació –12x(10+5) o (10+2) x 15– i d'altres que han descompost els dos factors i han operat –(10+2) x (10+5)–.

Descompondre els factors en factors més petits, és una estratègia que gairebé no l'utilitza cap alumne per resoldre la tipologia de càlculs plantejats perquè hi ha estratègies més ràpides d'utilitzar i/o més eficients per ells ja que només en veure el càlcul fan connexions mentals amb els nombres i no els cal recórrer a les estratègies més elaborades, és a dir, que requereixen de més temps a l'hora de resoldre-les . En aquesta, es descompon el 25 en factors més petits -10, 10 i 5– i es multipliquen per 6.

Només en el càlcul 6x25 els alumnes han utilitzat l'estratègia de càlcul *Fets coneguts i/o nombres de referència* ja que el 25 és ¼ part de la centena i ½ de 50, així doncs, permet que els alumnes ràpidament estableixin aquesta connexió i realitzin el càlcul mental. Contràriament, en el càlcul 12x15 també podrien haver fet aquests tipus de connexió però resulta un procés més laboriós a causa el valor del dividend i per tant, segurament els alumnes han optat per no utilitzar-la.

A la divisió, les estratègies utilitzades són Multiplicar, Sumar de manera iterada, Dividir descomponent, Raonament proporcional i Divisió parcial.

L'estratègia més utilitzada en les divisions 23:5 i 920:6 és la de *Multiplicar*, en concret utilitzant l'estratègia que els alumnes anomenen *Potes d'Aranya*. Pels alumnes els hi és fàcil i pràctica ja que entenen el divisor com "potes" i només han de repartir la mateixa quantitat a cada "pota" depenent del dividend que tinguin. Aquesta, només els hi funciona quan el divisor és petit, ja que com molt bé s'observa, en la divisió 300:15, cap alumne l'utilitza.

Sumar de manera iterada, només s'ha utilitzat en el càlcul que el dividend no té un valor elevat –25x5–, ja que si aquesta estratègia es basa en realitzar tantes sumes com faci falta per obtenir el dividend o el nombre més pròxim, si aquest és elevat, el procés esdevé molt llarg i no és tan factible pels alumnes.

Contràriament, l'estratègia *Dividir descomponent* ha sigut utilitzada per resoldre els tres càlculs però només ho ha fet una minoria d'alumnes, ja que hi ha altres estratègies que els assegura un càlcul més ràpid i que els permet realitzar connexions numèriques. És lògic que l'utilitzin en el càlcul 920:6 ja que en descompondre el dividend s'obtenen xifres acabades en 0 i per tant, els hi és molt més simple d'operar i la complexitat de la divisió es redueix.

L'estratègia de *Raonament proporcional* només l'utilitzen en el càlcul 920:6 ja que al ser dos nombres parells permet simplificar-los, és a dir, dividir el dividend i el divisor per la mateixa quantitat i crear un càlcul més senzill.

Finalment, l'estratègia de *Divisió parcial* no ha tingut molt èxit ja que només l'ha utilitzat una minoria d'alumnes i en un càlcul –920:6–. Això és a causa que és percebuda com a càlcul complex i els alumnes se senten més segurs operant realitzant més passos.

En funció del càlcul, els alumnes escullen una estratègia o una altra.

Després d'identificar les estratègies realitzades a la suma, a la resta, a la multiplicació i a la divisió, es pot concloure que l'estratègia utilitzada depèn dels nombres proposats. En el cas de les sumes i restes, si els nombres tenen un valor bastant elevant, opten per realitzar estratègies que no s'hagin d'ajustar els nombre ja que prefereixen descompondre'ls i operar a poc a poc encara que hagin de realitzar més càlculs i necessitin més temps. Això els aporta seguretat a no errar. Altrament, si els nombres tenen un valor més baix, prefereixen ajustar-los per obtenir-ne de referència i resoldre el càlcul ràpid. En el cas de les multiplicacions i divisions, si els nombres proposats són nombres de referència o nombres que fàcilment els poden modificar perquè esdevinguin coneguts, realitzen estratègies en les quals poden resoldre mitjançant connexions numèriques, però si això no és possible opten per operar a través de la descomposició dels nombres o realitzant estratègies que requereixen més càlculs.

És un exemple la resta 123-59. Els alumnes per no haver de modificar les xifres per obtenir un nombre de referència i a posteriori realitzar una altra estratègia de càlcul, de manera espontània, els alumnes *Descomponen els nombres segons el valor de posició* i a poc a poc van descomponent els nombres i realitzant el càlcul. D'aquesta manera es percep que els alumnes entenen el que realitzen quan operen mitjançant aquesta estratègia però porta a que realitzin errors ja que han de fer molts càlculs i retenir molts nombres a la ment.

Aquesta conclusió també es veu reflectida en la minoria d'alumnes que no utilitzen estratègies de càlcul i operen mitjançant l'*Algoritme tradicional*. Aquests, depenent dels càlculs que se'ls hi proposi l'utilitzen o no; si aquests són sumes i restes, opten per utilitzar-ho però quan se'ls hi presenta multiplicacions i divisions ja no ho intenten i només afirmen que no ho saben fer. Això és degut a que la seva metodologia de resolució és a través de l'*Algoritme tradicional* i sense paper i llapis no tenen l'habilitat de fer-ho.

S'observa que a les multiplicacions i divisions no hi ha cap alumne que utilitzi l'algoritme tradicional.

Hi ha alumnes que no realitzen els càlculs plantejats de les multiplicacions i divisions ja que argumenten que no saben com fer-ho, la gran majoria són els que als càlculs de suma i resta havien utilitzat l'*algoritme tradicional* i en aquests càlculs els hi és impossible realitzar-ho de manera oral en un interval de temps curt ja que les xifres són bastant elevades per poder imaginar mentalment l'algoritme a realitzar. Paral·lelament, també hi ha altres alumnes que fins aleshores havien utilitzat estratègies de càlcul, però en aquest punt comencen a tenir dificultats en realitzar connexions numèriques –en les divisions el percentatge d'alumnes augmenta en relació a les multiplicacions, tot i així, el total d'alumnes no supera el 20%–.

S'ha pogut comprovar que l'afirmació que realitza Martínez (2011) a través de la seva investigació és certa ja que els alumnes que utilitzen l'*algoritme tradicional* no tenen un nivell baix en matemàtiques però a causa de les limitacions imposades per la metodologia emprada provoca que hi hagi operacions –les multiplicacions i divisions– que no les puguin acabar de realitzar o, en aquest cas no les poden realitzar mentalment. Això és causat pel fet de no memoritzar i interioritzar tots els passos a realitzar i això els porta a no ser capaços de trobar altres camins per resoldre-les.

La gran majoria dels alumnes utilitzen estratègies de càlcul mental.

Un percentatge molt elevat d'alumnes resolen els càlculs plantejats a través de mètodes que han sigut ensenyats pels docents a tots els alumnes de la mateixa manera però que cada un l'ha personalitzat a la seva conveniència –depenent de les seves necessitats, capacitats i habilitats–, realitzant petites modificacions perquè els hi sigui més simple la realització del càlcul i puguin entendre el que fan.

Aquests mètodes són les estratègies de càlcul mental que utilitzen els alumnes per tal de resoldre càlculs de la manera més entenedora per ells. Els alumnes argumenten que utilitzen estratègies de càlcul mental que els hi serveixen molt ja que és una manera de calcular a través de diferents mètodes, tot resolent un mateix càlcul de diferents maneres però el resultat és el mateix –a les divisions, algun alumne deia: "la puc resoldre de tal manera que em doni residu, o que el resultat sigui decimal"–.

Cada estratègia de càlcul té un nom, ja que alguns dels alumnes a l'hora d'explicar el procés de càlcul realitzat, diuen que han utilitzat una estratègia i en diuen el nom –això significa que han estat treballades a l'aula i han establert un nom per a cada una –*potes d'aranya*, *l'holandesa*, *el caminet*, etc.–.

Els alumnes se senten còmodes utilitzant estratègies de càlcul ja que cadascú té la llibertat d'utilitzar la que més li convé en aquell moment; la que li agrada més o la que els hi resulta és més simple.

Una minoria d'alumnes utilitza l'a*lgoritme tradicional* per resoldre els càlculs ja que des de l'escola no se'ls ha ensenyat i com a conseqüència no es practica. Els pocs alumnes que l'han utilitzat són alumnes que a fora l'escola els hi han ensenyat i el segueixen practicant ja que per la resolució dels càlculs realitzats ho han utilitzat i això ajuda a comprendre que aquests se senten més segurs realitzant càlculs de suma i resta mitjançat l'algoritme tradicional que no pas a través d'estratègies de càlcul.

5.2 Conclusions en relació amb l'objectiu específic 2

Pel que fa a l'objectiu específic 2 "Analitzar les explicacions orals que els alumnes realitzen per tal d'explicar l'estratègia de càlcul mental utilitzada per resoldre el càlcul plantejat", es pot afirmar que s'ha assolit mitjançant l'observació de les gravacions realitzades als alumnes. A continuació, es presenten les conclusions:

***La gran majoria d'alumnes tenen l'habilitat d'explicar quins són els passos que han seguit mentalment per tal de resoldre un càlcul i ho fan d'una manera espontània i entenedora*.**

Els nens i nens han mostrat que explicar el que han realitzat per resoldre el càlcul no es tracta d'una tasca nova per a ells ja que el fet de realitzar càlcul mental a l'aula, és reconegut pels alumnes com un interval de temps el qual efectuen càlculs i se'n parla; tot això gràcies a l'ambient que s'ha aconseguit crear a l'aula –espais de temps on aflora la comunicació a través de preguntes i raonaments, i gràcies al respecte envers els companys i docents–. Tot això s'ha pogut percebre ja que la gran majoria dels alumnes no se senten estranys quan se'ls pregunta que expliquin per què aquell és el resultat del càlcul i no un altre, i directament ho argumenten amb les seves paraules però sempre intentant que s'entengui i si no queda del tot clar ho tornen a fer amb altres paraules –els alumnes que no expliquen res o quasi res és perquè utilitzen l'*algoritme tradicional* i no saben com explicar-ho–. Per tant, els alumnes que realitzen explicacions, argumenten els passos realitzats per dur a terme alguna estratègia de càlcul mental.

El percentatge d'alumnes que saben explicar els passos seguits per obtenir el resultat dels càlculs plantejats, és a dir, que es defensen explicant, a la seva manera com resolen diferents càlculs, és bastant més alt en relació als que no ho saben explicar. Aquest fet és tot un èxit ja que interessa que els alumnes entenguin què vol dir el concepte de suma, resta, multiplicació i divisió, i no interessa tant que els resolguin correctament o incorrectament.
Aquests alumnes, de manera més o menys elaborada raonen el procés de resolució del càlcul i es percep una clara coherència amb el que argumenten ja que expliquen tots els canvis que realitzen als nombres per tal d'aconseguir un càlcul més simple i així ser capaços de resoldre'l.

L'anàlisi de les explicacions orals dels alumnes han permès comprovar que tal i com argumenta Ortiz (2012), el fet de treballar càlcul mental com a rutina a l'aula, provoca que els alumnes a part de desenvolupar la competència matemàtica també desenvolupin la competència lingüística ja que han d'expressar-se el millor possible per tal d'explicar els processos que realitzen i intentar que s'entengui. La gran majoria dels alumnes mostren habilitat en raonar matemàticament sense por a equivocar-se tot transmetent seguretat i confiança en el que diuen.

Quan els alumnes argumenten tot el procés realitzat per a cada càlcul, la gran majoria tenen l'habilitat d'expressar-ho i ho realitzen amb un vocabulari adequat, cosa que produeix que l'investigador l'entengui. No només tenen la capacitat d'expressar-se d'una única manera sinó que en més d'una ocasió quan no s'acaba d'entendre el procés realitzat a causa de les connexions numèriques realitzades, són capaços de tornar-ho a explicar i, efectivament, d'una altra manera.

S'observa diferència en l'explicació dels passos realitzats a l'hora de resoldre sumes, restes i multiplicacions respecte les divisions.

Hi ha diferència en l'explicació els passos realitzats en resoldre sumes, restes, multiplicacions i divisions, però aquesta s'observa molt més en les divisions. En el moment d'explicar els passos realitzats o l'estratègia emprada per a resoldre els càlculs de les divisions, els alumnes mostren una certa dificultat ja que els hi resulta complicat argumentar verbalment els passos que van realitzant. Això porta a que hi hagi un gran nombre d'alumnes que no contestin quan se'ls hi pregunta quin és el resultat d'aquell càlcul i que expliqui com ho sap. A més, la majoria d'alumnes que ho argumenten no mostren tanta agilitat i capacitat d'argumentació com en les altres operacions; necessiten més temps per pensar, en alguns casos han de repetir dos cops el

raonament ja que no se'n recorden dels passos realitzats al principi, realitzen preguntes buscant l'aprovació de l'investigador "si, no?, és així oi?", etc.
Aquest fet porta a pensar que les divisions és l'operació que van començar a treballar en últim terme i no han sigut treballades durant el mateix temps que ho han fet amb les altres.

Els alumnes realitzen connexions amb les idees matemàtiques que disposen quan argumenten el procés realitzat en la resolució del càlcul.

Gràcies a les explicacions realitzades es pot veure com relacionen diferents continguts matemàtics que els hi serveixen per resoldre els càlculs. Un exemple és el càlcul 6x25, el qual molts alumnes argumenten "com que dos cops 25 és 50, i el 6 està format per tres agrupacions de dos, s'ha de sumar tres cops 50 i així s'obtindrà el resultat", aquest fet porta a pensar que els alumnes fan la connexió amb la idea que el 25 es la meitat de 50 i per tant, si se suma tres cops aquest resultat s'obtindrà el resultat final.

Gràcies a les explicacions orals s'aconsegueix que pensin amb els nombres –si estan formats per unitats, desenes i/o centenes, la relació que hi ha entre ells, és a dir, si un és el doble de l'altre, si són divisors, si es poden simplificar, etc.–, i així a poc a poc, cada un al seu ritme pot extreure el màxim profit a tots els coneixements integrats al llarg de la seva escolaritat per aconseguir resoldre diferents tipologies de càlcul.

Tal i com argumenta Parrish (2010), el càlcul mental no és una simple activitat d'aula sinó que és un contingut més de matemàtiques que s'ha de treballar de manera rutinària ja que permet desenvolupar moltes capacitats i habilitats, i també perquè permet que els alumnes connectin les idees que han anat adquirint al llarg de l'escolaritat i les vagin relacionant amb els nous continguts i, a poc a poc vagin entenent i reflexionant el significar de les estratègies de càlcul que realitzen.

Les explicacions orals els ha permès obtenir un resultat força proper al resultat correcte.

Els alumnes en el moment que realitzen una estratègia de càlcul mental, estan realitzant connexions amb els nombre, ja siguin més o menys simples però en fan. El fet d'argumentar-ho oralment permet que reflexionin sobre aquestes i que estructurin les explicacions que volen realitzar.

S'ha comprovat que molts dels alumnes, sobretot ha succeït a les divisions, diuen que no saben resoldre el càlcul però en insistir a que ho provin tot explicant què farien per resoldre-ho, comencen a descompondre nombres o a modificant-los i explicant en tot moment perquè ho fan –això permet que vagin trobant una lògica a tot el que efectuen–. Molts d'aquests alumnes no haurien obtingut un resultat pròxim al esperat al no ser per les explicacions orals que els ha permet trobar sentit al càlcul i obtenir un resultat final –correcte, pròxim al esperat o erroni–.

Els alumnes que han resolt el càlcul fent servir l'algoritme tradicional han tingut més dificultats per resoldre correctament el càlcul i per explicar el procés seguit.

Encara que els alumnes no sàpiguen resoldre del tot correcte els càlculs ja que realitzen petites errades, descuits o no saben com continuar el mecanisme utilitzat, gràcies al treball matemàtic realitzat durant el període de temps a l'escola tot integrant les diferents estratègies de càlcul, s'ha aconseguit que els alumnes disposin de l'habilitat d'aproximar-se al valor exacte dels càlculs, puguin explicar què significa per ells sumar, restar, multiplicar i/o dividir i ho puguin expressar oralment.

Contràriament, els alumnes que no realitzen cap estratègia de càlcul –només afecta a la suma i la resta– és perquè resolen els càlculs a través de l'a*lgoritme tradicional* i tenen bastants problemes en aconseguir el resultat del càlcul realitzat. Això és degut a que els alumnes no realitzen connexions mentals entre els nombres i han de sumar i restar xifra per xifra tot imaginar-se mentalment –com si estiguis escrit en un paper– el càlcul, i operar sense oblidar de col·locar cada nombre al lloc corresponent tal i com l'*algoritme tradicional* requereix. Aquest fet provoca que la gran majoria dels alumnes es quedin a la meitat del procés, que argumentin –després de varis segons– que no saben com resoldre'ls ja que necessiten un paper i un llapis, i no saben explicar els passos a realitzar o els passos que han realitzat mentalment –l'alumne que intenta argumentar-ho diu que ho fa igual com si ho fes en un paper, col·locant les unitats amb les unitats, les desenes amb les desenes i les centenes amb les centenes–.

A partir de les multiplicacions, els alumnes no utilitzen *l'algoritme tradicional ja* que els hi és molt complicat realitzar-ho mentalment i opten per dir que no saben com resoldre-ho i no contestar al que se'ls demana.

Això porta a entendre el que afirmava Parrish (2010), és a dir, que el fet de no treballar a partir d'estratègies de càlcul mental no porta a desenvolupar sentit numèric, a desenvolupar fluïdesa amb nombres petits –saber descompondre i compondre els nombres–, a comprendre el valor de posició, a comprendre l'aplicació de les propietats –commutativa, associativa, distributiva i l'element neutre–, i tampoc permet connectar idees matemàtiques. En la present recerca els alumnes han deixat constància que al no poder realitzar l'*algoritme tradicional* per resoldre els càlculs a causa de l'absència del paper i llapis, han sigut gairebé incapaços de resoldre'ls sobretot a les multiplicacions i divisions ja no ho han ni intentat, ni tampoc capaços de raonar el mecanisme. Per tant, hi ha moltes habilitats i capacitat que no han pogut desenvolupar.

El mateix afirma Martínez (2011) a través de la seva investigació a nens i nenes de 2n d'Educació Primària, ja que diu que els alumnes en utilitzar l'a*lgoritme tradicional* els perjudica en l'aprenentatge de les matemàtiques ja que adquireixen poques estratègies i mètodes espontanis per resoldre càlculs no rutinaris i tenen dificultats o no comprenen el significat de les xifres expressades.

5.3 Conclusions en relació amb l'objectiu específic 3

L'objectiu específic 3 "Identificar els errors que els alumnes realitzen a l'hora d'efectuar els càlculs" s'ha complert ja que per cada càlcul plantejat s'han recollit els errors que els alumnes presenten a l'hora de resoldre els càlculs mentalment. A continuació, es presenten les conclusions:

A les sumes, una minoria d'alumnes han realitzat errors.

Els errors realitzats a les sumes 99+17 i 116+118, són a causa de canviar un nombre per un altre o per restar enlloc de sumar, per tant, se suposa que són errades causades pel simple fet de no estar del tot atent al que s'estava realitzant.

S'observen errors a l'hora de modificar els nombres per obtenir un càlcul més senzill.

Quan es modifica un nombre, vol dir que aquest canvia el seu valor i pot ser perquè s'augmenta o es disminueix el valor de les xifres. Hi ha molts alumnes que ho fan ja que és una manera de poder realitzat tot tipus de càlculs que a simple vista semblen complexes però en ajustar un dels nombres –o els dos– aquest esdevé més simple.

En fer aquests canvis s'ha detectat que els alumnes realitzen errors ja que en finalitzar el càlcul no tenen en compte com s'ha de compensar la solució final; molts alumnes saben que han augmentat i/o disminuït una certa quantitat als nombres que se'ls presentava per operar però no saben si els han d'utilitzar per augmentar o disminuir el resultat final i en alguns casos no saben quina quantitat. També, s'ha observat que hi ha alumnes que ajusten un nombre per obtenir-ne un de més senzill –un nombre de referència– i en acabar de resoldre el càlcul no se'n recorden que per ajustar-lo s'ha afegit o eliminat unitats i per tant, cal compensar el resultat final. Principalment succeeix a les restes i a les multiplicacions.

S'observen errors a l'hora d'utilitzar l'algoritme tradicional a la suma i a la resta.

L'a*lgoritme tradicional* requereix una estructura molt fixa i si aquesta es modifica, el resultat del càlcul segur que serà erroni. A la suma, els errors són a causa de no tenir en compte que hi ha ocasions –depenent dels nombres dels quals es disposi– que en sumar dues unitats s'obté la desena i en col·locar el resultat tal i com l'*algoritme tradicional* requereix, els alumnes no ho tenen en compte i el càlcul no es pot solucionar correctament.

En el cas de la resta, succeeix el mateix ja que han de tenir present que si el minuend té un valor més gran que el subtrahend en realitzar el càlcul se li ha d'augmentar una desena a les desenes i aquests procés de manera mental els hi és gairebé impossible de recordar.

Paral·lelament, un altre error causat és en la col·locació dels nombres, és a dir, col·locar el minuend al lloc del subtrahend, i al inrevés. Així doncs, el resultat no podrà ser correcte encara que tot el procés ho hagi sigut.

Això ens fa pensar en les afirmacions que realitza Kamii (2010) quan diu que els alumnes que utilitzen l'*algoritme tradicional* no tenen el coneixement total del significat del valor de posició i per tant quan realitzen els càlculs difícilment se'n recorden de les xifres que –tal i com anomenen ells– "s'emporten". Així, a través d'un mètode tancat com és aquest, els alumnes perden coneixement conceptual i això provoca que el seu desenvolupament del pensament lògic i el raonament numèric es freni. Per tant, com que no permet que puguin establir connexions lògiques amb els nombres i les operacions, els alumnes només han pogut realitzar errors en la suma i resta ja que les multiplicacions i divisions no les han pogut efectuar mentalment.

Hi ha alumnes que utilitzen erròniament l'estratègia de Compensar per resoldre restes.

Gran part dels alumnes, per resoldre el càlcul –123-59– han utilitzat l'estratègia de *Compensar, és a dir,* augmentar o disminuir la mateixa quantitat als dos nombres per tal d'obtenir com a mínim un nombre de referència i així poder operar amb més facilitat. Aquesta estratègia els funciona perfectament a la suma i molts alumnes han suposat que si a la suma els porta a trobar un resultat correcte, a la resta també serà una estratègia igual de vàlida, però és una estratègia incorrecta per la resta.

Hi ha bastants alumnes que realitzen errors en l'ús de l'estratègia de Productes parcials.

Fent referència a les multiplicacions, l'error que realitza la gran majoria dels alumnes és durant l'execució de l'estratègia *Productes parcials* ja que fan errades en realitzar la propietat distributiva de la multiplicació perquè no tenen en compte el valor de posició dels nombres – no tenen present que els nombres estan formats per unitats, desenes, centenes, etc., i és necessari operar amb cadascun d'ells ja que sinó el resultat final serà erroni–.

En el cas del càlcul 12x15 és on s'ha vist més reflectit ja que els dos nombres estan formats per dues xifres i els alumnes han de tenir present que hi ha unitats i desenes; el 12 no està format per una unitat i dos unitats sinó per 1 desena (10 unitats) i 2 unitats –el mateix succeeix amb el nombre 15–. Per tant, es pot dir que els càlculs que els dos factors tenen més d'una xifra els porta a errar ja que tenen en compte el valor de posició d'un d'ells però no dels dos.

Els alumnes realitzen més errors quan les divisions no són exactes.

Quan els alumnes han de realitzar divisions que el resultat no és exacte, és a dir, que s'obté residu o el quocient és decimal, els alumnes presenten problemes a l'hora de realitzar els càlculs. Això succeeix a la divisió 23:5 ja que el quocient és 4 i el residu 3 o si s'opera amb decimals, 4.6. Una gran majoria dels alumnes afirmen que el quocient és 4 i que hi ha residu però no saben com "aconseguir-lo", o sinó també argumenten que el quocient és 4 o un nombre decimal però no saben quin, ja que els hi resulta complicat dividir 3:5 i no poden expressar el resultat. Així doncs, al no saber com acabar-la, alguns alumnes sumen les 3 unitats del divisor al quocient o argumenten que el resultat del càlcul és 4.

S'observa que els problemes són causats per no saber com obtenir el residu o el resultat amb nombres decimals, i no per no saber resoldre el càlcul.

S'observen errors a les divisions quan els alumnes han de retenir masses nombres a la ment o quan l'estratègia utilitzada esdevé llarga.

Hi ha una estratègia que la gran majoria d'alumnes l'han utilitzat per resoldre les divisions, aquesta és anomenada pels alumnes *Potes d'aranya* –en el treball s'ha englobat amb l'estratègia *Multiplicar*–, la qual per ells és molt significativa ja que els ajuda a entendre el significat de la divisió i ho transmeten a l'hora d'explicar el procés de la realització del càlcul. Aquesta, però, no acaba de garantir que obtinguin un resultat exacte ja que produeixen errors a causa de la dificultat de retenir a la ment totes les xifres que hi ha a les "potes" i amb facilitat, per equivocació, canvien els nombres i no poden acabar de resoldre el càlcul ja que perceben quelcom estrany en els resultats que van obtenint durant el procés. O si no s'adonen abans, expressen el resultat de manera errònia.

Aquest fet succeeix, en gairebé tots els casos que els alumnes utilitzen l'estratègia *Potes d'aranya* en el càlcul 920:6 ja que el dividend presenta un valor bastant elevat i els hi és complicat acabar de repartir-lo a les "potes" –a mig procés es perden–. Per tant, en realitzar aquesta estratègia amb nombres d'un valor elevat porta a errar a causa de la dificultat de no retenir tota la informació a la ment.

Passa el mateix, quan els alumnes volen resoldre divisions mitjançant la *Descomposició dels nombres segons el valor de posició* i el dividend té un valor elevat. Aquesta estratègia requereix temps i bastants càlculs ja que a mesura que es va descomponent s'ha d'anar dividir i mantenir el resultat a la ment per utilitzar-lo al final de tot el procés.

Això fa entendre, tal i com afirma Martínez (2011) que aquest fet segurament succeeix ja que la tria de l'estratègia no és l'adequada i han de realitzar més càlculs dels esperats i com a conseqüència, retenir molts nombres a la ment i això provoca que hi hagi una sobrecarrega cognitiva i hi hagi una major probabilitat d'errar en els resultat.

Hi ha alumnes que per a la resolució de les divisions descomponen el dividend.

Hi ha alumnes que per obtenir un càlcul més senzill del que es planteja, tal i com han realitzat a les altres operacions, descomponen els nombres. Però en el cas que el dividend sigui un nombre de referència o un nombre que no presenti dificultat per ells, opten per descompondre el divisor. Això succeeix a la divisió 300:15, i els alumnes realitzen dos càlculs senzills, és a dir, 300:10 i 300:5. D'aquesta manera s'asseguren que resolen bé el càlcul ja que aquests dos no presenten dificultat. Però és tot un error ja que els dos càlculs no tenen el mateix significat que el plantejat, per tant, la realització del càlcul serà errònia i com a conseqüència el resultat final també.

5.4 Conclusions globals

Considerant finalment que s'han complert els tres objectius específics, es pot afirmar que s'ha assolit l'objectiu general de la recerca i per tant, s'han pogut analitzar les estratègies de càlcul mental que els alumnes de 6è d'Educació Primària utilitzen. Tot i així, trobem important redactar aquest apartat de conclusions globals que ajudi a acabar de respondre la pregunta de recerca "com calculen mentalment els alumnes de 6è d'Educació Primària d'una escola que no se'ls ha ensenyat l'algoritme tradicional?". A continuació, es presenten les conclusions:

La gran majoria dels alumnes utilitzen estratègies de càlcul mental i una minoria l'algoritme tradicional.

No és una tasca simple poder dir com calculen els alumnes amb els que s'ha realitzat la recerca ja que cada un a la seva manera resol els càlculs sense seguir unes instruccions. Però si que es pot dir que hi ha una gran quantitat dels alumnes que utilitzen estratègies de càlcul mental i una minoria l'*algoritme tradicional*.

Cal dir que els alumnes que utilitzen estratègies de càlcul no ho realitzen de la mateixa manera ja que cada un utilitza el mecanisme que més li funciona o amb el que se sent més còmode. Aquests calculen amb molta rapidesa i agilitat, sobretot en les sumes i restes, fet que porta a pensar que van començar a treballar aquestes operacions i les seves estratègies molt abans que la multiplicació i divisió, i per tant, la rapidesa a l'hora de resoldre-les és major, el nombre d'errors és menor i la quantitat d'alumnes que no les resolen és quasi inexistent.

Els alumnes mostren més errors en la resolució de les multiplicacions i divisions en comparació amb les sumes i restes.

S'ha comprovat que els alumnes tenen les estratègies de càlcul de suma i resta bastant clares i són molt curosos a l'hora de dir el resultat i a l'hora d'argumentar per què les realitzen d'aquella manera, per tant, no presenten gaires errors en la seva resolució. Contràriament, en la multiplicació i divisió tot utilitzant estratègies de càlcul, mostren menys destresa en operar i en algunes ocasions realitzen errors fruit de no acabar d'entendre el que s'ha de fer o possiblement per falta d'habilitat en realitzar connexions amb idees matemàtiques. A poc a poc, aquests errors s'han d'anar polint per tal d'aconseguir poder arribar a un punt que els alumnes puguin predir resultats finals al màxim ajustats possible.

Paral·lelament, els alumnes que calculen presentant carències a l'hora de realitzar els càlculs de suma i resta ja sigui per falta de tècniques matemàtiques o per falta d'atenció, en les multiplicacions i divisions aquests fets s'agreugen molt més i quasi bé no són capaços de començar a realitzar els càlculs i per tant, no donen cap resposta.

Els alumnes reflexionen sobre el càlcul que se'ls hi proposa.

A través de les observacions mitjançant gravacions que han permès recollir i analitzar les argumentacions que els alumnes han realitzat, s'ha pogut comprovar que els alumnes calculen entenent el que realitzen –és interessant veure les connexions que realitzen amb els nombres i la manera com ho expliquen–. En totes les operacions –excepte en un càlcul– hi ha un percentatge més elevat d'alumnes que reflexionen sobre el càlcul que se'ls hi planteja en comparació amb el percentatge d'alumnes que han resolt els càlculs correctament, per tant, hi ha més alumnes que expliquen els passos que realitzen per resoldre el càlcul i per tant, entenen el que realitzen quan sumen, resten, multipliquen i divideixen i tenen l'habilitat d'expressar-ho amb les seves paraules que no el percentatge d'alumnes que els resolt de manera correcte. Això vol dir que encara que no siguin capaços d'obtenir el resultat correcte tenen l'habilitat d'aproximar el resultat ja que entenen el que fan i saben que han de realitzar per obtenir-lo. Aquest fet no és un problema ja que en aquesta etapa d'escolarització interessa que desenvolupin habilitats cognitives per ajudar a millorar el seu raonament lògic-matemàtic.

Aquí es recolza la idea que Parrish (2010) exposa quan afirma que si els alumnes treballen tot reflexionant sobre el càlcul en qüestió, se'ls anima a confiar en el que saben i intenten buscar recursos per acabar d'entendre la relació que hi ha entre els nombres; acció que tantes vegades s'ha repetit en la recerca quan els alumnes, sobretot a les multiplicacions i divisions, no sabien com resoldre-les i mitjançant l'esforç de pensar i connectar idees matemàtiques ho aconseguien.

Contràriament, la minoria d'alumnes que utilitzen l'*algoritme tradicional* no els succeeix el mateix ja que encara que hagin obtingut un resultat final correcte no reflexionen envers els passos que han realitzat per resoldre el càlcul, per tant, no saben com han arribat a aquell. Els alumnes rarament saben explicar o no contesten ja que a la meitat del procés es perden i no saben com continuar perquè el procés que realitzen és tan mecànic i el tenen tan interioritzat que ja no pensen el que fan. Aquest fet només els hi ha passat a les sumes i a les restes ja que a les multiplicacions i a les divisions, possiblement, es veuen incapaços de resoldre-les mentalment mitjançant l'*algoritme tradicional* i opten per dir que no les saben resoldre.

Això permet donar certesa a les afirmacions de Kamii i Dominick (2010) quan diuen que els alumnes que operen mitjançant l'*algoritme tradicional* calculen sense realitzar modificacions als nombres sinó que els resolen o intenten resoldre'ls imaginant-se l'operació escrita en un full. Però com que aquest no és físic i no poden deixar plasmat tot el que realitzen, no els hi acaba de sortir ja que és molt complicat mantenir els nombres ben col·locats a la ment i sense deixar-se d'operar cap. Per tant, aquests no poden reflexionar sobre el càlcul ja que tenen tantes dificultats en efectuar-ho que és impossible poder pensar en els passos emprats i argumentar-ho.

Els alumnes quan calculen mitjançant estratègies de càlcul mental desenvolupen moltes capacitats i habilitats.

S'ha comprovat, tal i com afirma Parrish (2010) que els alumnes utilitzant estratègies de càlcul mental desenvolupen *sentit numèric* perquè perceben els nombres com a quantitats senceres que estan formades per unitats, desenes, centenes, etc., és a dir, comprenen el valor de posició dels nombres. Això ho hem constatat perquè no hi ha gairebé cap alumne que vegi un nombre de tres xifres com una sola unitat excepte els alumnes que utilitzen el mètode de l'*algoritme tradicional*. També, com l'autora argumenta, *connecten les idees* matemàtiques que han anat adquirint al llarg de la seva escolaritat ja que realitzen relacions entre les diferents operacions (suma, resta, multiplicació i divisió) per tal de simplificar el càlcul, i desenvolupen *fluïdesa en descompondre i compondre* nombres petits ja que els modifiquen per obtenir càlculs més senzills.

Seguint amb Ortiz (2012), es pot dir que les seves afirmacions són inequívoques ja que els alumnes en realitzar estratègies de càlcul mental posen tota *l'atenció i concentració* en el que estan fent ja que el despistar-se porta a que el càlcul no es pugui acabar o que no se sàpiga què s'ha realitzat. També els porta a ser més *organitzats* ja que no només s'ha de realitzar un càlcul sinó que al realitzar un seguit de passos s'ha de tenir molt clar quin serà el primer i l'últim per tal de no deixar-se cap nombre sense operar, i a més, el fet de raonar els processos mentals els obliga a organitzar la informació per tal de transmetre-la correctament.

6. Limitacions de la recerca, Implicacions educatives i Futures recerques

En aquest apartat, primerament, es comentaran les limitacions de la recerca que durant el treball ens hem anat trobant i seguidament les implicacions educatives i les futures recerques que es podrien realitzar.

- Limitacions de la recerca

En primer lloc, hauria realitzar la investigació amb una mostra més àmplia d'alumnes, és a dir, amb tots els alumnes del curs i no només amb 20 alumnes ja que hauria obtingut més resultats i podria parlar de com calculen els alumnes de 6è d'Educació Primària i no només d'uns quants. Aquesta limitació va ser deguda a que es va realitzar dues proves als alumnes i el volum de dades obtingut hauria sigut enorme i ja a priori es va optar per només fer-ho a 20 alumnes.

Aquestes dues proves són la oral –explicada al present treball– i una altra d'escrita; aquesta consistia de nou fulls, a cada un hi havia un càlcul –els mateixos que els realitzats oralment– i dos preguntes relacionades amb aquests. La primera era *Com resoldries l'operació?* i la intenció era que els alumnes deixessin constància del procés escrit que realitzaven per resoldre cadascun dels càlculs i així poder entendre quina estratègia havien utilitzat. I la següent pregunta era *Sabries resoldre-la d'una altra manera? Quina/es?* i la intenció era que els alumnes mostressin que eren capaços de resoldre les sumes, restes, multiplicacions i divisions de més d'una manera, utilitzant altres estratègies i que expliquessin com ho havien realitzat –si no sabien cap altre estratègia, aquesta no calia respondre–.

La intenció era realitzar una anàlisi de les dades orals i escrites per tal de tenir informacions diferents sobre com els alumnes calculen mentalment i de manera escrita i així exposar com els alumnes de 6è d'Educació Primària que des de l'escola no se'ls ha ensenyat l'algoritme tradicional calculen.

Però en realitzar l'anàlisi d'aquests, es van obtenir un volum de dades massa gran i per un treball d'aquestes característiques no era viable. A més, el que interessava era saber com calculaven els alumnes mentalment i era bastant contradictori realitzar una prova escrita. I finalment, es va optar per només treballar amb les dades obtingudes de la prova oral i ja no es disposava de suficient temps per tornar a realitzar el qüestionari oral als altres alumnes del curs.

En segon lloc, el fet de començar a treballar amb les dades escrites, va limitar que només es pogués analitzar la primera estratègia que els alumnes argumentaven i no es va poder analitzar les altres estratègies que explicaven els alumnes referents a un mateix càlcul. Això va ser a causa de l'enorme volum de dades que s'obtenia i al llarg de la recerca es va arribar a l'acord que només s'analitzaria l'estratègia que haguessin argumentat primer. Aquest és un aspecte que ha quedat pendent, per tant, en una futura recerca seria interessant analitzar-ho per tal d'aprofundir més en els coneixements dels nens i nenes en relació al càlcul mental.

En tercer lloc, el fet d'anar a l'escola només a realitzar uns qüestionaris de manera oral em va limitar el fet de no poder contrastar molt millor la informació dels teòrics amb l'adquirida gràcies al treball amb els alumnes. Per tant, en una futura recerca no aniria a l'escola només a passar unes proves sinó que també aniria a l'aula a observar o a ajudar al docent per tal d'observar com realitzen càlcul mental, quines estratègies utilitzen els docents perquè els alumnes avancin en el seu procés d'aprenentatge, quina és l'evolució de cada alumne, com actuen els alumnes, etc.

- Implicacions educatives

El present treball pot servir de guia per docents que estan començant a treballar el càlcul mental a través d'una metodologia totalment diferenciada a la tradicional ja que aquest aporta informació teòrica basada en autors referents del tema i una investigació educativa per corroborar el que s'explica. És important que en coneguin la importància del treball rutinari del càlcul mental, la diversitat d'estratègia que hi ha i les habilitats que a poc a poc van adquirint els alumnes treballant el càlcul mental a través d'estratègies de càlcul. També pot servir perquè aquests docents puguin conèixer els errors més freqüents que realitzen els alumnes a l'hora de calcular i per tant, puguin actuar en conseqüència per ajudar a no fer-los o tenir clar que hi ha alumnes que els poden fer.
A més, pot ajudar a que docents i estudiants de mestre que mai no han sentit a parlar d'aquesta metodologia puguin realitzar un canvi de pensament envers el que entenen per càlcul mental i la manera de realitzar-lo a l'aula, per tal d'aconseguir que els alumnes gaudeixin i esdevinguin competents. Aquest treball ha de portar a entendre que aquesta metodologia ajuda als alumnes a saber explicar com resolen els càlculs i per tant, que durant el procés de

càlcul vagin reflexionant sobre el que fan. I si són capaços d'explicar-ho, significa que aquella estratègia l'entenen i els hi funciona.

Personalment, exposo que ha sigut un treball que m'ha aportat molts coneixements. Durant el Grau en Mestra d'Educació Infantil i sobretot al Màster en Innovació en Didàctiques especifiques en Matemàtiques vaig adquirir coneixement en relació al càlcul mental i a les estratègies però no havia tingut l'oportunitat de saber el gran nombre de beneficis que aporta treballar correctament el càlcul mental, és a dir, treballar-lo diàriament, amb materials, a través del raonament, de les preguntes, etc., ni tampoc l'oportunitat d'analitzar una per una totes les estratègies de càlcul mental amb les que me basat per realitzar la recerca.

Estic molt satisfeta de la feina realitzada ja que els coneixements apresos em serviran per transmetre'ls als alumnes quan treballi com a docent, fent que el càlcul no sigui una tasca avorrida i complicada, sinó una tasca que permeti aprendre moltes relacions amb els nombres i així poder realitzar càlculs ràpids –aproximats o exactes– fora l'escola sense necessitat del full i paper. Tanmateix, em poden servir –si tinc l'oportunitat– per poder-los transmetre a altres docents interessants a canviar la seva tasca educativa per tal de millorar-la envers les matemàtiques i en concret del càlcul. I també, per poder-los transmetre a estudiants de mestre perquè cal que tinguin constància i puguin aprofundir en aquest per tal de poder anar a treballar als centres educatius disposant dels coneixements necessaris per ajudar als alumnes a que confiïn en els seves pròpies habilitats i capacitats de poder realitzar qualsevol tipologia d'operació, ja sigui oralment com escrit numèricament.

Un cop finalitzada aquesta recerca, es pot dir que es podria replicar l'estudi a una altra escola que utilitzessin la mateixa metodologia, i també, realitzar-la a dos escoles més però en aquest cas, que calculessin mitjançant l'algoritme tradicional. D'aquesta manera, poder realitzar una bona comparativa envers els resultats obtinguts, i mostrar què succeeix quan els alumnes aprenen a calcular amb metodologies diferents. Per tant, es pot dir que la present investigació podria continuar.

Finalment, arribats en aquest punt de la recerca es pot dir que la pregunta que es qüestionava a la justificació del treball "són els alumnes que tenen dificultats per aprendre (o comprendre el que el docent explica) o és la metodologia emprada la que dificulta que els alumnes entenguin el que estan realitzant, i com a conseqüència, presentin dificultats a l'hora de calcular?", és bastant complexa de respondre però s'ha pogut comprovar que a través de la pregunta principal de recerca i dels objectius plantejats ha portat a realitzar una bona investigació i per conseqüent, poder dir que una actuació docent adequada amb un mètode idoni pot salvar molts dels inconvenients i obstacles que puguin presentar els alumnes. Els resultats de la investigació mostren que les matemàtiques poden deixar de ser una eina per mesurar la intel·ligència i es pot convertir en una eina poderosa de desenvolupament intel·lectual dels nens, una peça fonamental en la construcció del seu pensament lògic i crític.

La metodologia emprada a l'aula és el que fa que els alumnes es motivin i tinguin desig d'aprendre i acceptar nous reptes. Per tant, si això succeeix, hi haurà menys probabilitat a presentar dificultat en la comprensió del que explica el docent.

7. Bibliografia i webgrafia

Ablewhite, R. C. (1971). *Las matemáticas y los menos dotados*. Madrid: Morata.

Aragón, E., Canto, MªC., Marchena, E., Navarro, J.I. i Aguilar,M. (2017). Perfil cognitivo asociado al aprendizaje matemático con el método algoritmo abierto basado en números. *Revista en Psicodidáctica, 22*(1), 54-59.

Burns, M. (2012). *Math Reasoning Inventory*. Recuperat de https://mathsolutions.com/about-us/marilyn-burns/articles-by-marilyn-burns/

Canals, M. A. (1992). *Per una didàctica de la matemática a l'ecola. I. Parvulari.* Barcelona: EUMO Editorial

Canals, M. A. (2009). *Primers nombres i primeres operacions*. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.

Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria.* Madrid: Prentice Hall.

Kamii, C., Baker, L. (2000). *Young children reinvent arithmetic: implications of piaget's theory* (2ª ed.). New York: Teachers College.

Kamii, C., Dominick, A. (2010). Los efectos negativos de enseñar algoritmos en grados primarios (1ro al 4to). *Revista pedagogía, 43* (1), 59-73.

Latorre, A.; Del Rincón, D. i Arnal, J. (2005). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Ediciones experiencia.

Martínez, J. (2011). El mètodo de càlculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón*, 63(4), 95-110.

Ortiz, M. (2011). *Cálculo mental en el aula.* Madrid: Editorial CCS.

Ortiz, M. (2012). *Cálculo mental en el aula en el primer ciclo de educación primaria.* Madrid: Editorial CCS.

Parrish, S. (2010). *Number Talks*: *Helping children build mental math and computation strategies. Grades K-5.* California: Math Solutions.

Salgado, A.C. (2007). *Investigación cualitativa: diseños, evaluación del rigor metodológico y retos.* Universidad de San Martín de Porres, Perú.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso*: *Teoría y práctica*. Madrid: Morata, pp. 40 – 48.

Annexos

En el DVD adjunt a aquest treball es poden trobar els documents següents:

Annex I: càlculs escollits i resolució de les possibles estratègies utilitzades

Annex II: autorització dels drets d'imatge

Annex III: càlculs mostrats als alumnes

Annex IV: graelles amb les dades transcrites

Annex V: graelles d'anàlisi