FACULTAT D’EDUCACIÓ,
TRADUCCIÓ I
CIÈNCIES HUMANES

L’aprenentatge de càlcul mental a través de jocs a un aula d’educació primària

Treball de final de Grau de Mestre d’Educació Primària

Lorena MORENO MARTÍNEZ

4rt

Isabel Sellas Ayats

Facultat d’Educació, Traducció i Ciències Humanes

Universitat de Vic

16 de maig de 2014

Resum

Aquest treball es basa en identificar les estratègies de càlcul mental que fan servir alumnes de quart de primària. Aquesta identificació es realitza a partir de la resolució d'operacions per part dels alumnes i el seu posterior anàlisi. A partir de les estratègies que hagin sorgit, es realitzarà una intervenció didàctica basada en jocs matemàtics per tal de descobrir i treballar noves estratègies matemàtiques. Finalment, amb una nova prova es comprovarà si els nens i nenes coneixen i apliquen diferents estratègies pel càlcul mental. Amb aquesta intervenció es pretén comprovar si a partir de jocs els nens i nenes milloren les estratègies de càlcul mental.

Paraules clau: càlcul mental, estratègies, jocs matemàtics, intervenció didàctica, matemàtiques.

Abstract

This work is based on identifying mental arithmetic strategies used by fourth grade students. This identification is performed with the resolution of operations done by students and their subsequent analysis. With the strategies that have arisen, a didactic intervention based on mathematical games will be performed in order to discover and work with new mathematical strategies. Finally, if the children know and apply different strategies for mental arithmetic will be checked with a new test. This intervention is meant to check if games improve child mental calculation strategies.

Keywords: mental arithmetic, strategies, mathematical games, educational intervention, mathematics.

Sumari

1. Introducció **3**

2. Marc teòric **5**

2.1. Què és el càlcul mental? **5**

2.2. Importància del càlcul mental **7**

2.3. Tipus d'estratègia en el càlcul mental **10**

2.3.1. Estratègies per la suma 11

2.3.2. Estratègies per la resta 14

2.4. Ensenyament i Aprenentatge del càlcul mental **17**

2.4.1. Com aprenen matemàtiques els nens 17

2.4.2. Planificació per un aprenentatge significatiu 19

2.4.3. Metodologies en l'ensenyament del càlcul mental 20

2.4.4. Els afectes en l'aprenentatge del càlcul mental 23

2.5. Els jocs en el càlcul mental **24**

2.5.1. Els jocs a l'aula 25

3. Part pràctica **28**

3.1. Metodologia **28**

3.1.1. Orientació metodològica 28

3.1.2. Dimensió i aspectes concrets de l'estudi 29

3.1.3. Instruments 29

3.1.4. Aplicació de l'instrument 29

3.1.5. Intervenció 30

3.2. Anàlisi de resultats **36**

3.2.1. Sumes 37

3.2.2. Restes 41

4. Conclusions **49**

5. Bibliografia **53**

1. Introducció

El treball i intervenció didàctica que he dut a terme s'ha realitzat com a Treball Final de Grau pel Grau de Mestre d'Educació Primària. Aquest treball està centrat en les estratègies pel càlcul mental, mitjançant una prova s'identificaran les estratègies que els nens i nenes coneixen i fan servir més habitualment, a partir d'un anàlisi d'aquestes estratègies es planificarà una intervenció didàctica per tal d'introduir noves estratègies per tal que els alumnes tinguin més recursos i sàpiguen utilitzar per cada operació l'estratègia més adient. Una vegada s'hagi realitzat la intervenció, es realitzarà una altra prova per comprovar quines estratègies fa servir l'alumnat i es compararan amb els resultats inicials. El pilar central d'aquesta intervenció i d'aquest treball són els jocs matemàtics ja que a partir d'ells es volen millorar les estratègies.

Segons Ortiz (2011), els jocs a per aprendre matemàtiques són útils i efectius per diversos motius: perquè ajuden a aprofundir en conceptes numèrics, potencien les habilitats que comporta aquest tipus de càlcul, és una manera de treballar la resolució de problemes, i, els més importants per a la meva intervenció didàctica perquè les matemàtiques s'aprenen des d'un punt de vista lúdic restant-li duresa, i per acabar, perquè poden servir per motivar la relació i discussió entre els components i intercanviar opinions que puguin enriquir els coneixements.

Dit això, aquest treball consistirà en l'evolució d'onze alumnes de quart de primària, envers l'ús de les estratègies matemàtiques de càlcul mental per a operacions aritmètiques bàsiques de suma i resta, i la seva progressió treballant-les a partir de diferents jocs matemàtics.

Els objectius que es van plantejar per tal de realitzar aquest treball van ser:

- Identificar i analitzar les estratègies de càlcul mental que fan servir els alumnes de quart de primària.
- Realitzar una intervenció didàctica basada en jocs matemàtics per tal d'aprendre diferents estratègies pel càlcul mental.
- Comprovar si al final de la seqüència els alumnes han millorat, coneixen i saben aplicar l'estratègia més adient en cada operació.

Al llarg d'aquest treball veurem diferents apartats en els que es tractarà el tema escollit. Primer trobarem l'apartat teòric en què es trobarà diferent informació relacionada, d'entrada veurem què és el càlcul mental des del punt de vista de diferents autors com Ortiz (2011) o Baroody (1988). A continuació, veurem quina és la importància del càlcul mental tant des del punt de vista escolar com a la vida diària dels alumnes. Després, es mostraran diferents estratègies per la suma i per la resta segons Parrish (2010), ja que la meva intervenció s'ha centrat en aquest tipus d'operació. També, es veuran diferents apartats en relació a l'ensenyament i l'aprenentatge del càlcul mental, com les teories que existeixen sobre com aprenen matemàtiques els nens, o la planificació per aconseguir un aprenentatge significatiu; així com diferents metodologies per dur a terme el càlcul mental a l'aula. A més, comprovarem com afecten les creences, actituds i emocions a l'alumnat en relació a l'aprenentatge del càlcul mental. Per acabar, coneixerem diferents formes per aprendre càlcul mental a través de jocs, des de com introduir-los, a desenvolupar-los o finalitzar-los.

Seguidament, veurem en què consisteix la metodologia que s'ha dut a terme. En aquest apartat s'explicarà la orientació metodològica i quins han estat les dimensions i aspectes concrets de l'estudi. A més, veurem quins instruments s'han utilitzat, què s'ha analitzat i a qui anava dirigit; també, s'explicarà en què ha consistit la intervenció que s'ha dut a terme durant l'estada de pràctiques.

Després, es realitzarà un anàlisi dels resultats obtinguts en les proves. En primer lloc, es presentaran els resultats obtinguts en la primera prova que es va realitzar, comprovant quines estratègies escollien els alumnes per resoldre operacions de suma i resta. En segon lloc, es mostraran els resultats de la prova que es va realitzar després haver dut a terme la meva intervenció. A continuació, realitzaré un anàlisi dels resultats obtinguts.

En últim lloc, a les conclusions es compararan els resultats obtinguts amb el que s'ha explicat al llarg de l'apartat teòric.

2. Marc teòric

En aquest apartat teòric trobarem diferent informació relacionada amb el càlcul mental. En primer lloc, veurem què és el càlcul mental des del punt de vista de diferents autors com Ortiz (2011) o Baroody (1988). També veurem quina és la importància del càlcul mental des del punt de vista escolar i quotidiana dels alumnes. Seguidament, coneixerem diferents estratègies de suma i resta pel càlcul mental segons Parrish (2010); i diferents apartats en relació a l'ensenyament i l'aprenentatge del càlcul mental, com teories sobre l'aprenentatge del càlcul mental o una planificació per aconseguir un aprenentatge significatiu.

També veurem metodologies per dur a terme el càlcul mental segons Parrish (2010) i Ortiz (2011); i com afecten les creences, actituds i emocions en l'aprenentatge dels càlcul mental. Per acabar, veurem diferents formes per aprendre càlcul mental amb l'ajuda de jocs, i com introduir, desenvolupar i finalitzar els jocs.

2.1. Què és el càlcul mental?

Habitualment es pensa que el càlcul mental consisteix en realitzar càlculs matemàtics utilitzant només el cervell, sense ajuda d'altres instruments com calculadores, llapis i paper o, fins i tot, els dits per comptar. Però, són molts els experts que no comparteixen aquest pensament i defensen la seva pròpia definició de càlcul mental.

Segons Gómez (2005) el càlcul mental no ha de confondre's amb el càlcul estimat o l'aproximat, ja que únicament en el càlcul mental es treballa amb dades exactes per generar respostes mentals a un exercici aritmètic, mentre que en els altres dos tipus de càlcul no. Així, el càlcul mental seria una forma de calcular sense fer servir ajuda externa. Pel que fa al càlcul estimat i a l'aproximant, en el primer les dades són el resultat d'un judici o valoració; i en el segon, procedeixen del mesurament amb instruments de mesura que sempre tenen un marge d'error.

El càlcul mental segons Ortiz (2012) ha de ser un càlcul sense cap ajuda exterior, basada en l'exploració i reflexió, pràctic, motivador, relaxat, respectant el protagonisme i l'autonomia de cada individu, amb flexibilitat d'acció, diàleg, i on no ha de prevaldre la velocitat de resposta.

Ortiz (2011) classifica el càlcul mental segons el mitjà que es faci servir per realitzar-ho, que serien: una màquina (com una calculadora o un ordinador), llapis i paper, o mental.

Davant la qüestió quins dels mitjans anteriors seria el més adient, Ortiz defensa que el càlcul mental no requereix disposar de cap mitjà auxiliar, de manera que davant la situació d'haver de resoldre un càlcul, es recorre a l'ús de diferents eines/estratègies que permeten simplificar els càlculs i rebaixar la seva complexitat. En conseqüència, les persones que posseeixen aquestes habilitats per resoldre càlculs, tenen avantatge per enfrontar-se a les diferents situacions de la vida real.

Tenint en compte que el càlcul mental es tracta d'un càlcul que es realitza de cap o de memòria i sense ajuda, trobem dos tipus:

- Càlcul mecànic o d'estímul-resposta. Comporta l'ús d'una tècnica automàtica, existint el risc que quan no s'utilitza sovint s'oblida ràpidament.
- Càlcul reflexiu o pensat. Es caracteritza perquè cada vegada el càlcul és nou, de manera que cada càlcul representa la resolució d'un problema, ja que exigeix prendre decisions diferents o pensar estratègies. Això implica una reflexió que comporta l'elecció de l'estratègia més adequada.

Chamorro (2003) realitza una diferenciació entre el càlcul escrit i el càlcul mental, el primer es caracteritza per la utilització d'una sola tècnica, que sempre és la mateixa, independentment dels nombres a operar. En canvi, en el càlcul mental cada individu utilitza un procediment, en funció de les seves possibilitats de memorització, hàbits i coneixements. Algunes de les característiques del càlcul mental segons l'autora són que en el càlcul mental no existeix un únic procediment, i posseeix tècniques pròpies; també els algoritmes de càlcul escrit no són apropiats pel càlcul mental, i aquest últim explota les propietats dels números i les propietats de les operacions.

En resum, comprovem que els diferents autors concorden en definir el càlcul mental com un càlcul que es realitza sense cap ajuda externa. Tanmateix, hi ha punts en què els autors no coincideixen, com Gómez que fa una diferenciació entre el càlcul mental i el càlcul estimat o aproximant, mentre que Ortiz inclou aquests dos tipus de càlcul dins del càlcul mental, diferenciant-los només en el tipus de resultat (exacte o estimat).

En aquest treball entendrem el càlcul mental com qualsevol càlcul (tant exacte com aproximat) que es realitza mentalment, sense cap l'ajuda de material. I en el qual, es poden servir diferents procediments o estratègies per tal d'aconseguir arribar a la solució.

2.2. Importància del càlcul mental

Segons les orientacions que proporciona el Ministeri en el currículum d'Educació Primària, en l'educació primària es busca aconseguir una eficaç alfabetització numèrica, entesa com la capacitat per enfrontar-se amb èxit a situacions en les quals intervinguin els nombres i les seves relacions, permetent obtenir informació efectiva, directament o a través de la comparació, l'estimació i el *càlcul mental* o escrit. És important ressaltar que per aconseguir una veritable alfabetització numèrica no hi ha prou amb dominar els algoritmes de càlcul escrit, es precisa també, i principalment, actuar amb confiança davant els nombres i les quantitats, utilitzar-los sempre que sigui pertinent i identificar les relacions bàsiques que es donen entre ells. (M.E.C. 2007, Ordre ECI/2211/2007, de 12 de juliol)

Ortiz (2012) defensa que la pràctica diària de càlcul mental ajuda a desenvolupar una sèrie de competències: la comunicació lingüística, ja que es dóna importància a la participació dels alumnes, que han d'exposar els seus procediments a la resta de la classe; la competència matemàtica ajuda a aprofundir en la comprensió dels nombres, de les estructures numèriques i, ajuda a controlar i comprovar els resultats; el coneixement i la interacció amb el món físic, ja que la resolució mental dels problemes han d'estar relacionats amb la realitat dels alumnes. La competència social i ciutadana, ja que la metodologia de treball en grup es afavoridora; la competència d'aprendre a aprendre pels processos que es fan servir; i l'autonomia i iniciativa personal, en què l'alumne aprèn a trobar respostes a nombrosos problemes de la vida quotidiana.

El càlcul mental no només afavoreix i és important per l'aprenentatge de les matemàtiques segons Ortiz (2012), sinó que ajuda a desenvolupar diferents habilitats i capacitats:

- La concentració: quan es calcula distreure's equival a començar de nou.

- L'organització: per calcular s'ha de pensar pas per pas el procediment que s'ha de seguir i escollir el que es consideri més eficaç, el que suposa aprendre a organitzar-se.
- El rigor: al calcular s'aprèn a ser rigorós per no saltar-se cap pas del procés, saber quin és el millor procediment i no fallar en l'exactitud del resultat.
- La lògica i el raonament: implica reflexionar cada un dels passos que comporten els procediments per arribar a un bon resultat.
- La memòria: a l'haver de recordar fets, a curt i llarg termini. A curt termini: quan s'ha de recordar resultats entre els processos; a llarg termini: taules, propietats, fórmules, equivalències,...
- L'autonomia: ja que el fet de calcular mentalment és un procés individual en que cadascú escull quines passes i mètodes utilitzar.
- Reaccionar a l'estímul-resposta: a l'haver de respondre en un temps concret.
- La imaginació i la creativitat: aquestes habilitats es treballen a l'hora d'escollir com enfrontar-se a les operacions.
- Saber prendre decisions: a l'haver d'escollir una manera de resoldre-ho entre varies possibilitats.
- La seguretat i l'autoestima: el fet de saber resoldre problemes quotidians o operacions complexes dóna tranquil·litat, ajuda a decidir i permet autoafirmar-se.
- Per acabar, la utilitat: el càlcul té avantatges des del punt de vista pràctic ja que ajuda a entendre i a desenvolupar-se millor en el món actual, plegat de nombres, estadístiques, operacions, percentatges,...

Tanmateix, són molts els autors que també defensen els beneficis del càlcul mental a l'aula. Gómez [1] (1994) a la seva tesi doctoral, defensava la idea que el desenvolupament del càlcul mental a l'aula és una pràctica que va més enllà, ja que no només afavoreix a l'àrea de matemàtiques sinó que beneficia altres aspectes i àrees, com la comprensió i el sentit del nombre, conèixer les concepcions que tenen els estudiants sobre els procediments de càlcul i proporcionar una base pel càlcul aproximat. Així mateix, desenvolupa capacitats intel·lectuals, ja que proporciona versatilitat i independència de procediments, ajuda a la reflexió per decidir i escollir, afavoreix la concentració, proporciona confiança en el càlcul aritmètic i desperta l'interès i la capacitat de concentració.

[1] Vegeu més informació a Valencia Cifuentes (2013). *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas.*

Parrish (2010) defensa que el càlcul mental és un component clau, ja que encoratja als nens a construir sobre les relacions numèriques per resoldre problemes en comptes de confiar en els procediments memoritzats. Amb el càlcul mental, els nens es centren en les relacions numèriques i en fer servir relacions per desenvolupar estratègies flexibles i eficients amb exactitud. Quan els estudiants s'apropen als problemes sense paper i llapis, se'ls anima a confiar en el que saben i entenen sobre els nombres i com es relacionen entre si. Altre punt a favor del càlcul mental, és que ajuda a enfortir la comprensió del valor posicional dels nombres; a l'observar els nombres com a quantitats senceres en comptes de columnes, els alumnes adquireixen el valor de cada nombre.

Així mateix, Lethielleux[2] (2005) afirma que l'entrenament del càlcul mental és un molt bon mitjà per desenvolupar l'atenció, concentració i memòria; familiaritzar als nens amb els nombres de tal forma que puguin jugar amb ells, expressant-los de moltes formes diferents; i afavorir l'expressió, posada en comú, discussió i comparació (partint de dinàmiques col·lectives) de diversos procediments i estratègies per calcular.

Com a conclusió, veiem que el càlcul mental és important ja que no només ajuda a millorar en l'àrea a la que pertany, sinó que ajuda en diferents àrees. Altre punt a favor, és que ajuda en diferents aspectes, ajudant millorant en les competències bàsiques d'educació primària i millorant diferents habilitats que ens són útils tant en l'àmbit escolar com en l'àmbit personal de l'alumnat.

Però, tot i que hem vist que hi ha molts autors que defensen l'ús del càlcul mental a l'aula, hi ha molts que encara no l'apliquen a l'aula. Tal com Cockcroff[3] (1985:92) senyala: "*Creiem que la decadència del treball oral i mental en les classes de matemàtiques es conseqüència de la falta de reconeixement de la importància que el càlcul mental té en aquesta assignatura".*

Ortiz[4] (1999-2000) va realitzar entrevistes a diferents mestres que no treballaven el càlcul mental a l'aula, aquests es justificaven amb respostes com: *la falta de temps per acabar el programa*, *absència de continguts en els llibres de text*, *tenir molt treball, el que suposa molt temps de preparació* o *no dominar aquest tipus de càlcul*; tot això ens permet entendre perquè en moltes escoles té més importància el llapis i paper, al mateix temps que el mestre tendeix a demanar només respostes correctes.

---

[2] Vegeu més informació a Valencia Cifuentes (2013). *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas.*
[3] Vegeu més informació a Ortiz (2011).
[4] Projecte d'investigació i curs de càlcul mental. Dirigit a professorat de primària i secundaria. CPR de Valladolid (1999-2000).

Per tant, hem pogut observar que tot i haver molts autors que defensen els beneficis del càlcul mental en diferents àmbit de la vida dels alumnes, hi ha mestres que encara no ho treballen a l'aula.

2.3. Tipus d'estratègia en el càlcul mental

George Pólya[5] una vegada va dir: *It is better to solve one problem in five different ways than to solve five problems in one way*; és a dir, és millor resoldre un problema de cinc maneres diferents que resoldre cinc problemes d'una única manera. Aquesta afirmació la podem aplicar d'igual manera al càlcul mental, què és l'objecte d'estudi en aquest treball, adaptant-se i convertint-se l'afirmació en: *és millor resoldre una operació de cinc maneres diferents que resoldre cinc operacions d'una única manera*.

El National Council of Teacher of Mathematics (NTCM 2003: 37), en el document *Principis i Estàndards per a l'Educació Matemàtica*, recomana pels nivells des de 5 a 12 anys que *a mesura que els nens dels nivells Pre-K-2 (5 a 8 anys) van comprenent el significat dels nombres naturals i de les operacions d'addició i subtracció, l'ensenyament hauria de centrar-se sobre les estratègies de càlcul que desenvolupin la flexibilitat i la fluïdesa.*

Per a Ortiz (2011) existeixen nombroses estratègies que faciliten la resolució mental de les diferents operacions. Amb el treball que es realitza a l'aula d'aquests procediments, l'alumne precedeix a aprendre o fer seves les estratègies que més s'adapten al seu esquema mental, sense necessitat de tenir que descobrir-les personalment. Segons l'autora, existeixen dos corrents de pensament: la primera la dels que defensen que els nens desenvolupin els seus propis mètodes i treballin només estratègies informals, com passa en molts països. La segona, la dels que imposen aquells procediments estàndards més formals que imposa el mestre.

Des del punt de vista de l'autora, al començament l'alumne no té recursos suficients per crear estratègies i, per tant, és positiu presentar les que siguin més eficaces i més senzilles que les dels algoritmes estàndards i, d'aquesta manera, donar lloc a que els alumnes puguin crear noves estratègies. D'acord amb això, es creu que l'alumne primer ha de conèixer els continguts bàsics relacionats amb el càlcul i, a partir d'aquell moment, se li proporcionin a l'aula les estratègies relacionades sense rebutjar les que

[5] George Pólya, matemàtic hongarès (1887-1995).

ell mateix descobreixi. Aquest tipus d'estratègies que el nen descobreix de forma intuïtiva, són les primeres que el mestre ha de tenir en compte.

Per acabar, tot i que són molts els autors que proposen diferents estratègies per treballar la suma i la resta (operacions en què s'ha centrat aquest estudi), s'explicaran únicament les que proposa Sherry Parrish (2010) en el seu llibre *Number talks: helping build math and computation strategies*, ja que són en les que m'he basat a l'hora de realitzar la intervenció.

2.3.1. Estratègies per la suma

Les estratègies que veurem a continuació, estan pensades per tercer, quart i cinquè de primària; ja que la prova i la intervenció que s'han dut a terme han estat dirigides a aquest nivell. Cadascuna de les estratègies té un nom que ajuda a entendre el seu funcionament, però aquest es pot adaptar o canviar segons els alumnes. Les estratègies tot i que poden ocupar molt espai en forma escrita, en càlcul mental es resolen ràpidament. Totes les estratègies per la suma es mostraran a partir de l'operació 116 + 118[6].

Descompondre cada nombre en el seu valor

Quan els nens comencen a entendre el valor de posició, aquesta és una de les primeres estratègies que fan servir. Cada sumand es trenca de forma expandida i com a valor posicional. Al combinar les quantitats, els nens tendeixen a treballar d'esquerre a dreta, ja que mantenen la magnitud dels nombres.

116 + 118

(100 + 10 + 6) + (100 + 10 + 8)
100 + 100 = 200
10 + 10 = 20
6 + 8 = 14
200 + 20 + 14 = 234

En l'exemple, cada sumand es separa en els seus valors relatius. Les centenes es combinen, les desenes es combinen i les unitats es combinen. El total s'aconsegueix combinant les quantitats anteriors.

[6] Les imatges de les estratègies han estat extretes de Parrish (2010).

Nombres de referència

Els nombres de referència són números que són fàcils de fer servir en el càlcul mental. Els múltiples de deu, cent, mil, i així successivament, així com el vint-i-cinc o el cinquanta; són qualsevol nombre que sigui fàcil pels nens. Els alumnes poden modificar el sumand afegint o restant quantitats per fer un nombre de referència o un número amic.

$$116 + \underset{\downarrow\,+2}{118}$$
$$116 + 120 = 236$$
$$236 - 2 = 234$$

En aquest exemple, el 118 es modifica afegint-li 2 per convertir-lo en un nombre més senzill. Un cop realitzada l'operació, s'ha de restar el que s'ha afegit anteriorment.

Fer dobles

Des d'educació infantil, els nens són capaços de recordar sumes per molts dobles. Aquesta estratègia aprofita aquest fet per ajustar un o ambdós nombres per fer una combinació de dobles.

En aquest exemple els nombres es podrien modificar de diverses maneres, fent 116 + 116 o 118 + 118, però les operacions amb unitat 5 solen ser més fàcils. Una vegada s'ha realitzat la operació, s'ha de sumar la quantitat extreta inicialment; en el cas d'haver afegit al començament de l'operació, al final aquesta s'hauria de restar.

$$\underset{\downarrow\,-1}{116} + \underset{\downarrow\,-3}{118}$$
$$115 + 115 = 230$$
$$230 + 4 = 234$$

Fer deus

Desenvolupar la fluïdesa amb les combinacions de números fa que el deu sigui un punt important en els primers graus. A mesura que avancen, els nens han de ser capaços de descompondre els nombres ràpidament per fer el deu. L'objectiu d'aquesta estratègia és ser capaç d'utilitzar la fluïdesa amb el deu per millorar l'addició.

116 + 118

A.
(110 + 2 + 4) + (110 + 8)
110 + 110 + (2 + 8) + 4
110 + 110 + 10 + 4 = 234

B.
(110 + 6) + (110 + 4 + 4)
110 + 110 + (6 + 4) + 4
110 + 110 + 10 + 4 = 234

En la imatge podem veure dos exemples per fer servir aqueta estratègia, en l'exemple *A* s'ha descompost el 6 en 2 i 4, sumant-li el 2 al 8 del segon sumand per tal de construir un 10. En l'exemple *B*, s'ha descompost el 8 en 4 i 4, sumant un d'aquests al 6 del primer sumand.

Compensar

Aquesta estratègia és similar a *nombres de referència*, on es manipulen els números per convertir-los en d'altres més senzills. La característica principal d'aquesta estratègia i que la diferència de l'altra, és que quan es treu una quantitat a un sumand s'ha de donar la mateixa quantitat a l'altre sumand. *Compensar* és molt útil pels alumnes ja que es pot afegir i treure qualsevol quantitat, sempre i quan aquestes siguin igual en els dos nombres.

A l'exemple *A* s'ha afegit 2 al 118 per tal de convertir-lo en un número més fàcil, i per tant, se li ha de treure la mateixa quantitat al 116.

116 + 118

A.
116 + 118
↓ − 2 ↓ + 2
114 + 120 = 234

B.
116 + 118
↓ + 4 ↓ − 4
120 + 114 = 234

A l'exemple *B*, trobem una altra possibilitat, aquesta vegada s'ha sumat 4 al 116 convertint-lo en 120, i s'ha tret la mateixa quantitat a l'altre sumand per tal de compensar.

Descompondre un dels nombres

Aquesta estratègia és similar a *descompondre cada nombre en el seu valor*, excepte que en aquest cas només es descompon un dels nombres, mantenint l'altre sumand sencer. En els dos exemples trobem el mateix procediment, s'ha descompost un dels sumands. A l'exemple *A*, el segon sumand s'ha descompost en centenes, desenes i

116 + 118
A.
116 + (100 + 10 + 4 + 4)
116 + 100 = 216
216 + 10 = 226
226 + 4 = 230
230 + 4 = 234
B.
(110 + 6) + 118
(118 + 110) + 6
228 + 6 = 234

unitats, descomponent aquestes últimes en dos nombres per tal de poder construir fàcilment un deu; en l'exemple *B*, únicament s'ha separat les unitats. Una vegada s'ha realitzat la descomposició, el procediment és el mateix, s'ha sumat para fracció a l'altre sumand.

2.3.2. Estratègies per la resta

Aquestes estratègies a l'igual que les de la suma que hem vist anteriorment, estan pensades per tercer, quart i cinquè de primària ja que és el nivell al que ha estat dirigit l'anàlisi i la prova realitzades. Cadascuna de les estratègies que veurem a continuació té un nom dóna una pista sobre com es desenvolupa aquesta, però el nom pot ser adaptat i canviat pels alumnes. Les estratègies tot i que poden ocupar molt espai en forma escrita, en càlcul mental es resolen ràpidament. Totes les estratègies per la resta es resoldran partint de l'operació 123-59[7].

Sumar endavant

Aquesta estratègia permet a l'alumne aprofitar la seva habilitat amb la addició sumant des del subtrahend fins al minuend. Quan els alumnes comencen a entendre que la resta és trobar la diferència entre les dues quantitats, s'adonen que sumant poden calcular aquesta distància.

El mestre haurà d'ajudar a l'alumne a realitzar els salts per arribar a la desena més propera o a un nombre de referència. Quant més grans siguin aquests salts, més útil serà aquesta estratègia.

[7] Les imatges de les estratègies han estat extretes de Parrish (2010).

123 – 59

+ 1   + 40   + 23   = 64

59   60   100   123

123 – 59 =
59 + 1 = 60
60 + 40 = 100
100 + 23 = 123
1 + 40 + 23 = 64

Podem observar dues formes per realitzar aquesta estratègia, en el primer cas es realitza sobre la recta numèrica, aquest mètode és útil al inici de treballar aquesta estratègia, però finalment els alumnes seran capaços de realitzar-la sense la recta numèrica física.

Comptar endarrere

Si els alumnes han entès la resta com la distància entre els dos nombres, arribaran per ells mateixos a aquesta estratègia. En aquest cas, a partir del total o minuend, s'ha de treure el subtrahend en parts que siguin fàcil pels alumnes; en aquest punt intervindrà l'habilitat dels alumnes per descompondre nombres. Hi haurà alumnes que els hi serà més fàcil treure quantitats grans i d'altres que ho faran amb nombres més petits i múltiples de 10.

123 – 59

123 – (10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 3 + 6)

–10   –10   –10   –10   –10   –3   –6

123   113   103   93   83   73   70   64

A l'exemple de la imatge veiem aquesta última. En aquest cas s'ha descompost el 59 en cinc desenes, un tres i un nou. I a partir de la recta numèrica es veu com s'ha extret cada valor fins arribar a la diferència.

Descompondre amb nombres negatius

123 – 59

(100 + 20 + 3) – (50 + 9)

	100	20	3
–		50	9
	100	– 30	– 6

100 – 30 = 70
70 – 6 = 64

En aquesta estratègia s'ha de descompondre els nombre segons el valor de cada xifra. Aquesta descomposició es pot representar de forma expandida o separant cada nombre d'una manera similar a l'algoritme tradicional. En l'exemple que veiem, els nombres han estat separats en columnes segons el seu valor (xifra de la centena, desena o unitat), i aleshores s'ha realitzat la resta.

Mantenir una diferència constant

Quan els alumnes entenen la resta com la diferència entre dues quantitats, poden començar a investigar el que succeeix quan ambdós nombres canvien en la mateixa proporció. Per comprendre aquesta estratègia seria útil treballar-la amb operacions senzilles com 5 – 3, i què succeeix quan s'afegeix o es treu la mateixa quantitat a ambdós nombres.

123 – 59

123 – 59

+1 +1

124 – 60 = 64

A l'exemple de la imatge, les dues quantitats han estat modificades afegint una unitat a cadascun per tal d'aconseguir nombres més senzills, ja que el 59 s'ha convertit en 60 i les operacions amb zeros són més simples.

Ajustar el nombre

Aquesta estratègia té com objectiu ajustar un dels nombres per crear una operació més fàcil. Quan es fa servir aquesta estratègia l'alumne s'ha de plantejar dues qüestions: la primera, quin dels dos nombres és més útil per ajustar; la segona, com s'ha de compensar en la solució final.

123 – 59

A.

123 – 59

+1

123 – 60 = 63

63 + 1 = 64

B.

123 – 59

– 4

119 – 59 = 60

60 + 4 = 64

En la imatge trobem dues formes diferents de resoldre l'operació. A l'exemple *A*, s'ha afegit una unitat al segon sumand per tal de realitzar una suma amb zeros i convertir-ho en una operació més senzilla. Una vegada s'ha realitzat la resta després d'haver ajustat el nombre, s'ha de compensar el que s'ha modificat. En aquest cas, al haver afegit un nombre al subtrahend, la diferència entre els dos s'ha fet més petita; per tant, al resultat final s'ha d'afegir la mateixa quantitat per tenir la diferència inicial.

En l'exemple *B*, el nombre que s'ha ajustat ha estat el minuend, traient quatre unitats d'aquest per tal que les unitats del minuend siguin les mateixes que les del subtrahend, convertint d'aquesta manera l'operació en més senzilla. A l'igual que amb l'exemple anterior, una vegada s'ha resolt l'operació s'ha de compensar, en aquest cas, com el minuend s'ha reduït i ha fet més petita la diferència entre els dos nombres, ara s'ha d'afegir la mateixa quantitat per compensar-ho.

2.4. Ensenyament i Aprenentatge del càlcul mental

2.4.1. Com aprenen matemàtiques els nens

Segons Baroody (1988), els mestres per poder prendre decisions eficaces han d'entendre com aprenen matemàtiques els nens. El coneixement psicològic pot ajudar als mestres a jutjar la idoneïtat dels mètodes, els materials i la seqüència del currículum. La comprensió del procés d'aprenentatge pot ajudar-los a decidir com presentar un tema i fer que els nens l'acabin per dominar.

Existeixen dues teories generals sobre com aprenen matemàtiques els nens: la teoria de l'absorció, que afirma que el coneixement s'imprimeix en la ment des de l'exterior; i la teoria cognitiva, que defensa que el coneixement no pot imposar-se des de l'exterior sinó que ha d'elaborar-se des de dins.

A continuació, coneixerem aquestes teories amb més profunditat.

Teoria de l'absorció

A continuació, veurem algunes de les principals característiques d'aquesta teoria:

- *Aprenentatge per associació.* Segons aquesta teoria, el coneixement matemàtic és un conjunt de dades i tècniques formades per elements bàsics denominats associacions. Per exemple, els nens aprenen que 7 i 3 fan 10 de forma mecànica i a base de repetició, fins a convertir-se en un hàbit.

- *Aprenentatge passiu i receptiu*. Aprendre comporta copiar dades i tècniques: un procés essencialment passiu. L'associació queda impresa en la ment principalment per repetició. La persona que aprèn només necessita ser receptiu i estar disposat a practicar. Dit d'una altra manera, aprendre és un procés de memorització.

- *Aprenentatge acumulatiu.* El creixement s'amplia mitjançant la memorització de noves associacions.

- *Aprenentatge eficaç i uniforme*. Aquesta teoria parteix del supòsit que simplement els nens estan desinformats i se'ls pot donar la informació amb facilitat. Com que l'aprenentatge per associació és un procés de copia, hauria de produir-se amb rapidesa i fiabilitat. Segons això, en la mesura que les dades i tècniques es presentin amb claredat i es practiquin suficient, tots els nens hauran d'avançar cap a la perfecció de manera eficaç i uniforma.

- *Control extrem*. L'aprenentatge ha de controlar-se des de l'exterior. El mestre ha de modelar la resposta dels alumnes mitjançant l'ús de premis i càstigs; ja que es creu que sense la promesa d'una recompensa o sense l'amenaça d'un càstig, els nens serien passius.

Teoria cognitiva

A continuació, veurem algunes de les principals característiques d'aquesta teoria:

- *Les relacions, claus bàsiques de l'aprenentatge.* Segons aquesta teoria el coneixement no és una simple acumulació de dades; sinó que l'essència del coneixement és l'estructura: elements d'informació connectats per relacions, que formen un tot organitzat i significatiu.

- *Construcció activa del coneixement.* Comprendre requereix pensar; i la comprensió es construeix activament des de l'interior mitjançant l'establiment de relacions entre informacions noves i el que ja es coneix.

- *Canvis en les pautes de pensament.* L'aprenentatge implica modificar les pautes de pensament; és a dir, establir una connexió pot modificar la manera en què s'organitza el pensament; modificant-se, per tant, la manera que té un nen de pensar sobre determinat fet. Dit d'una altra manera, la comprensió pot aportar punts de vista més frescos i poderosos.

- *Límits de l'aprenentatge.* Com que els nens no es limiten a absorbir informació, la seva capacitat per aprendre no té límits. Però, els nens construeixen la seva comprensió de la matemàtica amb lentitud, per tant, és un procés lent que necessita molt de temps ja que el pensament dels nens es construeix activament, les idees i els mètodes per resoldre operacions poden no coincidir amb el que s'ha ensenyat. Per tant, és molt usual que els nens es basin en els seus propis mètodes inventats per realitzar l'aritmètica bàsica (com sumes i restes), ja que tenen més significat per ells.

- *Regulació interna.* L'aprenentatge pot ser una recompensa per si mateix. Els nens tenen una curiositat natural, així com un desig de descobrir el sentit del món. A mesura que el seu coneixement s'amplia, els nens busquen cada vegada reptes més difícils.

2.4.2. Planificació per un aprenentatge significatiu

En relació al que hem vist a l'apartat anterior, les decisions educatives que es prenen a l'aula estan basades en una de les dos teories prèvies. Durant moltes dècades, la teoria de l'absorció ha estat la principal força de l'ensenyament de les matemàtiques. Però, en els últims anys, la teoria cognitiva ha aportat una explicació profunda de l'aprenentatge significatiu. Aquesta teoria afirma que el coneixement matemàtic no es limita a ser un magatzem de dades i tècniques que poden inculcar-se; sinó que aquesta teoria ofereix un marc de referència més sòlid per la presa quotidiana de decisions pràctiques.

Baroody (1988) descriu un seguit d'implicacions generals per estimular la construcció activa del coneixement:

1. *Concentrar-se en estimular l'aprenentatge de relacions*. L'ensenyament basat en la memorització presenta greus límits i defectes. A l'igual que els adults, els nens es resisteixen a aprendre informació que no tingui sentit per ells. Concentrar-se en les relacions pot fer que l'aprenentatge sigui més significatiu i agradable. Normalment, els nens no veuen com es pot aplicar la informació apresa de memòria a tasques quotidianes o escolars noves però relacionades. És probable que l'aprenentatge de relacions produeixi més "transferència" que la memorització.

2. *Concentrar-se en ajudar als nens a veure connexions i a modificar punts de vista.* L'aprenentatge significatiu implica assimilar i integrar informació. Per fomentar un aprenentatge significatiu és important ajudar als nens a veure la connexió existent entre la instrucció i els seus propis coneixements. La

instrucció també hauria d'orientar-se a mostrar com es relacionen entre si els blocs d'informació.

3. *Planificar tenint en compte que l'aprenentatge significatiu requereix molt temps.* L'aprenentatge significatiu s'aconsegueix de manera gradual, mitjançant la comprensió de cada pas. És dóna un llarg període de preparació abans que es produeixi una reorganització del pensament. En conseqüència, tant els alumnes com els mestres experimenten menys frustració si s'assigna un temps adequat per l'assimilació i la integració del coneixement.

4. *Estimular i aprofitar la matemàtica inventada pels propis nens.* Els nens no imiten als adults, sinó que inventen els seus propis mitjans per enfrontar-se a les tasques matemàtiques. El paper de la matemàtica informal per fomentar l'autoconfiança i l'aprenentatge significatiu ha de ser destacat i elogiat.

5. *Tenir en compte la preparació individual.* Tot i que la comprensió pot donar-se sobtadament, no es produeix a l'atzar. És poc probable que es doni un aprenentatge significatiu si un nen no té els coneixements necessaris per assimilar un nou ensenyament.

6. *Explotar l'interès natural dels nens en el joc.* El joc és el mitjà natural dels nens per explorar i dominar el seu entorn. Els jocs poden proporcionar una via interessant i significativa per aprendre gran part de les matemàtiques elementals. Tots els tipus de jocs ofereixen oportunitats per aplicar i practicar tècniques aritmètiques bàsiques. Els jocs brinden als nens l'oportunitat natural i agradable d'establir connexions i dominar tècniques bàsiques, i poden tenir un valor incalculable per estimular tant l'aprenentatge significatiu com la memorització.

2.4.3. Metodologies en l'ensenyament del càlcul mental

En l'apartat anterior, hem parlat de com planificar un aprenentatge significatiu en les matemàtiques, en aquest, es realitzarà un contrast pel càlcul mental.

En aquest apartat veurem dues propostes diferents de com dur a terme l'ensenyament del càlcul mental a l'aula. En primer lloc, veurem com hauria de ser una classe en què es treballi aquest tipus de càlcul segons Parrish (2010); i en segon lloc, veurem quina és la metodologia que Ortiz (2011) recomana per dur a terme.

Ensenyament del càlcul mental segons Parrish

Parrish (2010) proposa alguns procediments per tal de dur a terme a l'aula xerrades sobre els nombres i d'aquesta manera treballar el càlcul mental:

1. *Seleccionar una ubicació que permeti al mestre mantenir la proximitat amb els alumnes per l'observació informal i les interaccions*. S'ha de plantejar el temps de conversa com un moment important marcant-li una ubicació específica a l'aula, on els estudiants es reuneixin per aquest fi. Tot i que hi ha mestres que volen que els seus alumnes es mantinguin al seu lloc habitual, l'autora troba més beneficiós canviar, ja que és més fàcil construir una comunitat cohesionada i un debat, fent que els estudiants s'allunyin de les seves rutines i distraccions habituals. Que el mestre es col·loqui en un lloc proper als alumnes pot ser útil per realitzar una avaluació informal i observant la participació dels alumnes es poden planificar les següents intervencions.

2. *Proporcionar el temps d'espera adient per garantir que la majoria dels estudiants han trobat la solució*. A l'esperar que la majoria dels alumnes hagin trobat la solució, s'envia el missatge que s'espera que tots els alumnes pensin i busquin la solució durant aquesta espera. Molts estudiants tenen la idea errònia que no són bons a matemàtiques ja que no són ràpids; l'autora proposa una estratègia per aplicar a l'aula i evitar aquests pensaments. Aquesta estratègia consisteix en aixecar un dit quan s'hagi trobat una solució, aleshores el mestre en comptes de demanar la resposta als nens més ràpids ha d'esperar a que la majoria hagi aixecat als altres. Quan els alumnes més ràpids han trobat una solució, se'ls anima a seguir trobant diferents maneres per resoldre-ho, quan tingui una altra estratègia aixecarà altre dic, i així successivament. L'objectiu és no premiar la velocitat, sinó centrar-se en pensar.

3. *Totes les respostes són acceptades, respectades i considerades.* S'han de respectar totes les idees i respostes dels alumnes independentment de si són errònies o no. Si no es respecten aquestes idees errònies no podrien crear-se debats matemàtics. Els alumnes que es troben en entorns d'aprenentatge segurs estan disposats a córrer el risc de compartir les seves idees amb el fi de créixer matemàticament. En aquest punt té molta importància el mestre, ja que

no pot realitzar cap expressió verbal o física que indiqui si la resposta és correcta o incorrecta.

4. *Fomentar la comunicació de l'alumne al llarg de la xerrada.* L'alumne ha de ser capaç de compartir estratègies individuals o compartir les estratègies dels altres. Un mètode que proposa l'autora per fomentar-ho, és fer que els alumnes pensin per si mateix i després comentar-ho amb l'alumne que tenen al costat. D'aquesta manera tots els estudiants es troben involucrats i els nens que no solen participar els hi serà més còmode expressar els seus pensaments en petit grup.

Ensenyament del càlcul mental segons Ortiz

Ortiz (2011) proposa una metodologia per tal d'afavorir l'ensenyament i l'aprenentatge del càlcul mental:

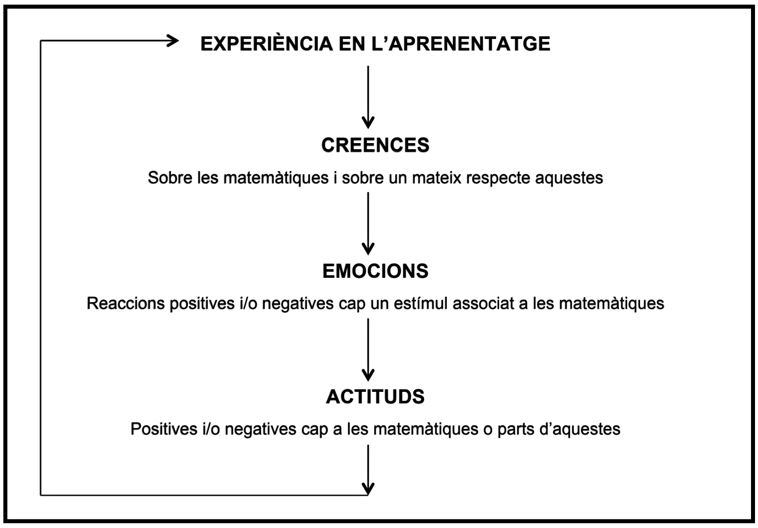
- El treball a l'aula ha de ser participatiu, l'alumne ha de ser capaç de prendre decisions i saber defensar-les davant la resta de companys; això, obliga a ser reflexiu i fixar els coneixements.
- El treball a l'aula ha de ser atractiu, el qual es pot treballar a través de diverses activitats, com exercicis i jocs en petits i grans grups.
- L'alumne ha de sentir-se còmode i segur, per tant, el mestre no ha d'insistir en la velocitat de la resposta, ja que això provoca inseguretat en els alumnes més lents.
- L'aplicació de la resolució dels càlculs ha d'estar relacionada en l'entorn de l'alumnat, ja sigui a partir dels continguts del curs com a través de la resolució de problemes reals a la vida quotidiana.
- Els alumnes més endarrerits haurien de disposar de material de treball autoavaluador, ja sigui mitjançant programes informàtics o altres materials, amb l'objectiu d'anar apropant-se al gran grup.

2.4.4. Els afectes en l'aprenentatge del càlcul mental

Piaget[8] (1977) pensa que el desenvolupament intel·lectual és una suma d'aspectes cognitius i afectius, establint-se un estret paral·lelisme entre el desenvolupament afectiu i intel·lectual, ja que ambdós es complementen. Goleman[9] (1995) estableix que en tots nosaltres hi ha dos ments: la que *pensa* i la que *sent*, és a dir, una és racional i l'altre és emocional.

Segons Ortiz (2011) s'estableix una relació cíclica entre els afectes (emocions, actituds i creences) i l'aprenentatge; posat que l'estudiant adquireix una experiència a l'aprendre matemàtiques i aquesta experiència provoca diferents reaccions que influeix en la formació de les seves creences. Al mateix temps, aquestes creences tenen una conseqüència directa en les emocions que generen una actitud davant les situacions d'aprenentatge i, per tant, influiran en la seva capacitat d'aprendre. En el següent quadre[10], ho veurem explicat.

Un alumne, després d'una experiència d'aprenentatge en la que rep una sèrie d'estímuls (relacionats amb la matèria, amb el mestre, l'ambient de l'aula,...) generant-li tensió, reacciona emocionalment (condicionat per les seves creences sobre si mateix i sobre les matemàtiques), ja sigui de forma positiva o negativa, sigui quina sigui, aquesta es transforma en una actitud. Si les experiències d'aprenentatge es repeteixen de forma similar i segueixen produint en l'alumne les mateixes reaccions afectives, ens trobem amb que es pot automatitzar la reacció emocional (satisfacció, frustració,...) i, passat el temps, la seva actitud sempre serà molt similar.



[8] Vegeu més informació a Ortiz (2011).
[9] Vegeu més informació a Ortiz (2011).
[10] Quadre extret de Ortiz (2011).

2.5. Els jocs en el càlcul mental

Tal com explicava Baroody (1988) en l'apartat 2.4.2, planificació per un aprenentatge significatiu, s'ha d'explotar l'interès natural dels nens en el joc ja que és el seu mitjà natural. D'igual manera i com hem vist a l'apartat anterior, és importat que els alumnes tinguin bones experiències amb les matemàtiques, i els jocs és un bon mètode per crear experiències positives.

Ortiz (2012) explica que, dins d'un marc constructivista, els jocs són molt importants ja que:

- Ajuden a aprofundir en conceptes numèrics.
- Potencien les habilitats que comporta aquest tipus de càlcul.
- Es una forma de treballar la resolució de problemes.
- Milloren l'actitud cap a les matemàtiques, ja que es treballen des del punt de vista lúdic, restant-li duresa.
- Poden servir per motivar la relació i discussió entre els seus components i intercanviar opinions que poden enriquir els coneixements.

Ortiz recomana utilitzar en els jocs diferents materials didàctics com cartes, daus, dòminos, xifres i lletres, oques, parxís, fitxes sobre paper, pissarra,... És molt útil el material tant individual com grupal en el que els nens i nenes es puguin autocorregir, ja que ajuda a facilitar la feina del mestre, al mateix temps que el nen pot seguir avançant amb certa autonomia.

Kamii (1993), defensa l'ús dels jocs a l'aula, ja que les situacions del dia a dia i els jocs col·lectius proporcionen oportunitats per què els nens pensin. Això es causa de que els nens es troben emocionalment implicats i estan mentalment actius, i quan es senten implicats i estan interessats aprenen més ràpidament. És molt menys probable que els exercicis repetitius i mecànics que es troben a les llibretes d'exercicis provoquin aquesta activitat mental.

Els jocs tenen principalment dos avantatges davant dels quaderns d'exercicis: proporcionen al nen una raó pròpia per fer aritmètica, i el feedback prové dels companys i d'un mateix.

2.5.1. Els jocs a l'aula

Georgia DeClark en el llibre *El niño reinventa la aritmética* de Constance Kamii, explica els principis relatius en els que s'han de basat els jocs col·lectius. Explicant des de l'elecció, la introducció, a la participació i la finalització.

Elecció del joc

En referència a l'elecció de jocs, la primera tasca del mestre es escollir els jocs adequats. En aquest cas és molt important la disposició dels jocs a l'aula, col·locant tot el material a l'abast dels alumnes i retirant-lo quan deixi de tenir interès.

És important escollir jocs que no siguin massa difícils ni massa fàcils. A mesura que avança el curs, els jocs es tornen més difícils. En un primer moment, no s'ha de preocupar perquè un joc sigui del tot adequat, ja que els nens saben quins jocs els hi agrada i són els que fan servir amb més freqüència. Si algun joc no es fa servir, ràpidament es comprova que el joc no és adequat. Així com molts dels jocs són modificats pels mateixos nens d'acord al nivell del seu desenvolupament. D'igual manera, és fàcil saber quan el nivell dels alumnes és superior al dels jocs, ja que es troben a les prestatgeries i no s'utilitzen, aleshores, és moment de retirar-ho.

Tenir una capsa per a cada joc. És millor disposar una capsa per a cada joc, gràcies a això no hauran de cercar el material necessari per jugar, sinó que ja disposaran d'ell des del primer moment.

Com introduir els jocs

Segons la tipologia de joc, la introducció haurà de ser d'una manera o una altra, a continuació, veurem quatre formes diferents de fer-ho:

1. *Jugar amb uns quants nens davant tota la classe, per veure com es juga*. Aquest tipus d'introducció té un grau més alt d'èxit en jocs de tauler que en jocs de cartes. Com els taulers són grans i ocupen molt espai, es millor que els jugadors s'asseguin al terra al seu voltant i que els espectadors observin drets darrere dels jugadors. Aquest tipus de demostració, afavoreix la interacció entre els jugadors i els espectadors. Els que observen tenen l'oportunitat

d'intercanviar idees sobre estratègies, donar consells no sol·licitats i especular sobre els resultats del joc. Aquest tipus d'introducció, no es adequat per jocs que tinguin regles massa complexes.

2. *Jugar al joc amb varis nens i dir a la resta de la classe que ells els hi ensenyaran.* És important tenir en compte la personalitat i la capacitat dels nens que juguen al començament amb el mestre. Aquests nens, necessiten un grau suficient d'articulació i concentració per explicar eficaçment les normes dels seus companys. Es aconsellable que el mestre jugui amb els nens un nombre de vegades suficient per assegurar-se que comprenen com es juga.

3. *Jugar amb molts grups reduïts fins que tots els nens hagin jugat amb el mestre.* En aquesta manera d'introduir un joc, s'empra molt de temps, però és molt útil i necessària per a jocs complicats. Quan les normes són complexes, els nens necessiten que se'ls recordin amb freqüència i que se li mostrin exemples. L'intercanvi d'opinions i estratègies pot afavorir amb més facilitat en grups reduïts.

4. *Mostrar un joc als nens i preguntar-lis si necessiten que se'ls expliqui.* Molts jocs tenen formats similars que són fàcils de reconèixer, per tant, si els nens i nenes han tingut alguna experiència amb jocs, poden saber a simple vista com s'ha de jugar. Quan els nens troben similitud entre un joc nou amb un joc anterior, prefereixen descobrir el seu funcionament per ells mateixos, amb això és fomenta l'autonomia dels alumnes. La responsabilitat que sentien els nens quan resolien les disputes sobre les normes, era major quan eren ells qui les havien inventat. Aquest tipus d'introducció no es adequada per a jocs que no siguin familiars pels nens o que tinguin normes molt complexes.

Participació en els jocs

Pel que fa a la participació en els jocs, es necessari intervenir de maneres diferents a les que es fa quan es juga amb adults, a continuació s'explicaran diferents formes:

Segons les idees dels nens i la seva manera de pensar, fins i tot quan aquestes semblin inadequades. El constructivisme ens permet comprendre perquè és millor animar als nens a jugar a la seva manera en comptes d'imposar-lis una manera adulta, que no els hi és pròpia, de seguir els torns, donar les cartes, no fer trampes,... Per exemple, *els torns,* no hi ha raó per tallar la iniciativa dels nens, imposant-lis el que des del nostre punt de vista, seria el mètode més adequat. Altre exemple seria l'*elecció del primer jugador*, als nens normalment els hi agradar ser el primer en començar, però és millor no dir-lis res i que esbrinin per ells mateixos que aquest comportament no és adequat. Un últim exemple seria en les *reparticions* com en els jocs de cartes, l'encarregat de repartir la baralla en moltes ocasions repartiria el que a simple vista seria la meitat sense tenir en compte la quantitat real de cartes que tingui cadascú. Exigir que ho facin com nosaltres consideraríem correcte seria un error, ja que quan es desenvolupi la seva lògica ja apareixerà aquesta idea.

Participar eficaçment en els jocs requereix una gran quantitat d'autolimitació per part del mestre. S'ha de valorar l'autonomia dels nens, deixant que ells facin i desfacin les regles. Moltes vegades els mestres es troben temptats a reforçar les normes/regles que ells consideren correctes, però amb aquest comportament s'obté com a resultat una obediència heterònoma per part dels nens. Per contra, quan són els nens els qui creen les seves pròpies regles, es troben obligats a pensar què és el més just en cada moment. També, han d'interactuar i arribar a acords entre tots els participants.

Donar als nens temps per pensar. Quan els nens participen activament i s'esforcen en els jocs, necessiten i mereixen tenir tant temps com els hi faci falta. Aquesta necessitat de paciència es dóna amb més freqüència quan un nen de nivell inferior juga amb altre nen de nivell més avançat que ell. Per tant, s'ha de transmetre als nens que esperen la idea que s'ha de respectar el temps que tothom necessiti per pensar.

Intervenir indirectament en comptes de corregir respostes incorrectes o jocs desenvolupats a un nivell inferior a l'adequat. En els jocs és millor que el mestre intervingui com un jugador més. Si per exemple, un els jugadors avança incorrectament una fitxa per les caselles del tauler, és millor no corregir al nen, sinó a partir d'un comentari fer-li veure l'error.

Fomentar la interacció amb els companys. És bo que els nens intercanviïn punts de vista entre ells, per saber posar-se en el lloc de l'altre.

Com finalitzar el joc

Quan s'ha finalitzat el joc, és important restar importància a la competició i simplement preguntar als nens què volen fer a continuació. El fet de guanyar no hauria de representar res.

D'igual manera, és important que després del joc es doni l'oportunitat als nens que parlin entre si sobre el que acaben de fer, comentar les estratègies pròpies i dels companys, què es podria fer per millorar en properes partides,...

3. Part pràctica

En aquest apartat veurem quina ha estat la metodologia que s'ha emprat en aquest treball. En primer lloc, veurem la orientació metodologia i quins han estat les dimensions i aspectes concrets de l'estudi. A continuació, veurem quins instruments s'han utilitzat, què s'ha analitzat i a qui anava dirigit; també, s'explicarà en què ha consistit la intervenció que s'ha dut a terme durant l'estada de pràctiques.

Per acabar, es realitzarà un anàlisi dels resultats obtinguts en les proves. Primerament, es presentaran els resultats obtinguts en la primera prova i les estratègies que van escollir els alumnes per resoldre les operacions. Després, es mostraran els resultats de la segona prova. Per acabar, es realitzarà un anàlisi dels resultats obtinguts.

3.1. Metodologia

3.1.1. Orientació metodològica

La orientació metodològica en què s'ha basat aquest treball ha estat la investigació-acció, ja que es vol identificar les estratègies que alumnes de quart de primària utilitzen amb més freqüència per tal de poder descobrir i practicar noves estratègies durant la intervenció, per posteriorment avaluar els resultats.

3.1.2. Dimensió i aspectes concrets de l'estudi

L'estudi es basa en identificar quines estratègies de càlcul mental fan servir amb més freqüència un grup d'alumnes de quart de primària. Dins del càlcul mental, em centraré en les estratègies que utilitzen per resoldre operacions de suma i resta. Per tant, comprovaré quines són les estratègies que fan servir i si el resultat és correcte o incorrecte.

L'estudi s'ha realitzat a un grup d'onze alumnes d'una classe de quart curs d'educació primària. L'edat d'aquests alumnes és d'entre nou i onze anys, ja que una alumne va repetir curs; d'igual manera, el nivell d'aprenentatge dels alumnes escollits és diferent entre ells. Altra finalitat d'aquest estudi, ha estat conèixer els coneixements previs dels alumnes per tal de poder planificar la intervenció didàctica que es duria a terme durant l'estada de pràctiques, i poder treballar diferents estratègies pel càlcul mental.

3.1.3. Instruments

La tècnica que s'ha emprat per realitzar la recollida de dades per tal de conèixer les estratègies que fan servir els alumnes, ha estat una prova. Aquesta prova consistia en la resolució amb càlcul mental d'un seguit d'operacions matemàtiques: sumes i restes.

Aquesta prova consistia en tres sumes i tres restes; aquestes eren, per la suma: 27 + 23, 152 + 153 i 59 + 36; i per la resta: 61 – 38, 175 – 42 i 123 – 59. La primera prova es va realitzar durant l'última visita al centre de pràctiques (9, 10 i 11 de desembre); posteriorment, durant el període intensiu de pràctiques i després de la intervenció, es va realitzar una segona prova.

Totes les operacions que es van escollir van ser pensades perquè es poguessin resoldre amb el màxim d'estratègies possibles.

3.1.4. Aplicació de l'instrument

Per tal d'obtenir els resultats, es va realitzar la prova amb les operacions esmentades anteriorment. Aquesta prova es va fer fora de l'aula ordinària per tal que els alumnes estiguessin sols i sense pressió. Les operacions estaven impreses en targetes individuals[11], per tal que resolguessin les operacions, se li donava una de les targetes a l'alumne, i aquest havia de resoldre l'operació que s'indicava. Per tal de no pressionar-los, se'ls deixava un temps perquè pensessin la resposta, i una vegada sabien el resultat, se'ls demanava quin havia estat el procediment que havien seguit per tal de trobar la resposta. Una vegada havien explicat el procediment, se'ls demanava si la sabrien resoldre fent servir una estratègia diferent, en cas afirmatiu, se'ls demanava que l'expliquessin. Aquest procediment s'ha seguit amb totes les operacions que s'havien preparat, realitzant primerament les operacions de sumes i, seguidament, les operacions de restes, sempre de forma individual i sense que els nens coneguessin les altres operacions.

Una vegada es van obtenir els resultats de la prova, es van analitzar classificant cada resolució per part dels alumnes a un tipus d'estratègia. Una vegada es van conèixer totes les estratègies que solien fer servir els alumnes, es va preparar una intervenció tenint com a eix central els jocs, per tal de descobrir i practicar noves estratègies pel càlcul mental.

Aquesta prova es va realitzar de forma individual i la durada va ser d'entre 10 i 15 minuts per cada nen en funció del seu nivell d'aprenentatge. La primera prova es va realitzar durant l'últim període de visita al centre de pràctiques (9, 10 i 11 de desembre), i la segona prova després de la intervenció durant l'estada de pràctiques (del 20 de gener al 21 de març).

L'estudi es va realitzar amb un grup d'onze alumnes de diferents nivell d'aprenentatge. Per tal de formar un grup el màxim d'heterogeni possible, es va demanar a la tutora de l'escola que escollís ella mateixa els alumnes que realitzarien la prova. Aquest grup es va formar basant-se en tres nivells d'aprenentatge: alt, mitjà i baix.

3.1.5. Intervenció

La intervenció que es va dur a terme va constar d'una activitat d'introducció de noves estratègies, i de cinc jocs matemàtics pensats per practicar estratègies de càlcul mental. Segons les peticions de la tutora de l'escola, les estratègies i les activitats es van haver d'adaptar a la seva metodologia i les seves exigències. Les estratègies que finalment es van treballar per la suma van ser: fer deus, fer dobles i nombres de

[11] Veure annex 1.

referència; i per la resta: sumar endavant, comptar endarrere i mantenir una diferència constant.

Aquesta primera activitat tenia com a objectiu descobrir noves estratègies, i es va desenvolupar en cinc sessions diferents d'entre mitja hora i una hora cadascuna. La primera sessió es va dedicar per descobrir noves estratègies per la suma. Per tal de poder treballar d'una manera més còmode, es van separar els alumnes en parelles i es va repartir una capsa de regletes a cada parella per tal de poder treballar amb els nombres d'una manera més significativa pels alumnes. Abans de començar a treballar, es va explicar als alumnes que en aquesta sessió intentaríem descobrir noves estratègies, per tant, es va escriure a la pissarra la primera operació, 28 + 12 + 4, pensada per resoldre-la amb l'estratègia fer deus. Mentre els alumnes intentaven resoldre la operació, jo anava passant entre les taules demanant quin era el procediment que seguien per resoldre la operació.

Si els alumnes resolien l'operació mitjançant una estratègia que no fos la que es tenia prevista, se'ls demanava que l'intentessin resoldre d'una manera diferent. Quan la major part de l'alumnat havia descobert l'estratègia, una parella va sortir a la pissarra i va explicar quins van ser els procediments que van seguir per tal de resoldre l'operació, i es va posar nom a l'estratègia. Tot seguit, es va passar a descobrir la segona estratègia, fer dobles, amb l'operació 14 + 16; el procediment va ser el mateix que amb l'estratègia anterior. Per acabar, es va descobrir l'estratègia nombres de referència mitjançant l'operació 19 + 47; seguint el mateix procediment que amb les estratègies anteriors. La segona sessió es va dedicar a repassar les estratègies que s'havien descobert en la sessió anterior. Es va realitzar mitjançant la resolució de diferents operacions mitjançant les noves estratègies descobertes per la suma.

En la tercera sessió, es van descobrir noves estratègies, en aquest cas, per la resta. En aquest cas, i a l'igual que amb les sumes, es van agrupar els alumnes en parelles i es va repartir una capsa de regletes a cadascuna. Una vegada els nens desposaven del material, es van escriure tres operacions a la pissarra: 32 – 17, 30 – 19 i 41 – 16. Una vegada els alumnes les havien vist, se'ls va explicar que aquella sessió seria dedicada per descobrir noves estratègies per la resta. Mentre els alumnes resolien les operacions, jo anava passant entre els nens demanant quin era el procediment que estaven seguint per resoldre les operacions, una vegada un dels nens resolia alguna de les operacions mitjançant una de les noves estratègies, havia de resoldre altre de les operacions amb una estratègia diferent. En el cas que algun dels alumnes tingués dificultats per descobrir una nova estratègia, s'agrupaven diferents alumnes per tal que s'expliquessin les estratègies descobertes els uns als altres.

Quan la major part dels alumnes havia descobert almenys dos de les estratègies, van sortir algunes parelles a explicar el procediment que havien seguit per tal de resoldre les operacions. Una vegada ho van explicar als companys, es va posar nom a les diferents estratègies. La quarta sessió es va dedicar a repassar les estratègies que s'havien descobert en la sessió anterior. Es va realitzar mitjançant la resolució de diferents operacions mitjançant les noves estratègies descobertes per la resta. La cinquena i última sessió, es va dedicar a resoldre els possibles dubtes de les noves estratègies, tant per la suma com per la resta, i per practicar les estratègies.

La segona activitat que es va realitzar va introduir el primer joc als nens, en aquest cas, va ser el joc del dòmino. Aquest joc es va treballar en dues sessions, i amb tots els alumnes conjuntament.

Per començar a jugar, es va demanar als alumnes si coneixien el joc del dòmino, i un d'ells els hi va explicar als companys quin era el funcionament del joc. Tot seguit, es va repartir una peça del dòmino[12] a cada alumne, i se'ls hi va explicar als alumnes la diferència entre aquest dòmino i el "clàssic". En aquestes peces, en comptes d'haver-hi números en les peces, hi havien operacions de suma o resta en un dels costats de la peça, i en l'altre hi havia un resultat. Es va explicar als alumnes que l'objectiu del joc era completar el dòmino, per tal de fer-ho ells havien de resoldre l'operació que hi havia a la peça de dòmino que cadascú tenia, i que a més a més, havien d'observar les operacions de les peces de la pissarra per si podien col·locar la seva peça al costat de l'operació.

Una vegada es va explicar el funcionament i la mecànica del joc, i els alumnes no tenien dubtes; es va repartir la fitxa de joc[13], i els alumnes la van completar mentre s'explicava cada part. Dit això, es va posar a la pissarra la primera peça del dòmino, i els alumnes anaven sortint si podien col·locar la seva peça per algun dels dos costats; es podien col·locar resolent la operació de la peça de la pissarra i que coincidís amb la solució de la peça de l'alumne, o resolent l'operació de la peça de l'alumne i que coincidís amb el resultat de la peça de la pissarra. Quan un alumne sortia a la pissarra i col·locava la seva peça, havia d'escriure a la pissarra l'operació que havia resolt per poder col·locar la seva peça i explicar quina estratègia havia fet servir per tal de trobar

[12] Veure annex 2.
[13] Veure annex 3.

la solució. Si un alumne no estava d'acord amb l'estratègia que havia fet servir un company, a la seva fitxa havia de resoldre l'operació indicant des del seu punt de vista quina era l'estratègia més adient.

La tercera activitat es va realitzar en una única sessió, i pretenia treballar l'agilitat mental. Per començar, es van separar als alumnes en grups heterogenis de quatre alumnes. Un cop els nens estaven agrupats, es va repartir un tauler dels nombres[14] i unes instruccions[15] a cada grup, també es va repartir tres daus cada dos alumnes i deu fitxes de colors a cada alumne sent diferents entre els membres del grup. Una vegada els alumnes disposaven de tot el material, un alumne va llegir les instruccions del joc. Abans de començar es va realitzar a la pissarra un exemple de jugada per tal que els alumnes practiquessin diferents combinacions d'operacions i entenguessin el funcionament del joc.

Una vegada els alumnes havien entès el funcionament del joc i no tenien dubtes, es va repartir la fitxa de joc[16], on havien de col·locar el resultat dels daus i la puntuació que obtenien. Mentre els alumnes anaven jugant, jo passava entre ells per tal de resoldre possibles dubtes i donar petites ajudes als alumnes que presentaven més dificultats de càlcul.

La quarta activitat va introduir el joc del bingo, i es va realitzar en dues sessions. Per introduir el joc, es va començar ensenyant als alumnes alguns dels cartrons del joc per veure si identificaven quin joc era; una vegada un dels alumnes el va identificar, aquest va explicar com era el funcionament del joc a la resta de la classe. Tot seguit, es va explicar als alumnes la diferència entre el bingo "clàssic" i el que nosaltres jugaríem, en aquest cas en comptes d'un bombo amb números, jo dictava operacions[17] matemàtiques de suma i resta i les haurien de resoldre per tal de poder tapar un dels nombres del cartró. Un cop dit això, es va repartir un cartró[18] del bingo a cada alumne, i es va explicar que els nombres estaven ordenats de més petit a més gran; a continuació, es va repartir un grapat de fitxes a cada alumne per tal de poder tapar els nombres que donessin com a resultat d'una operació. Una vegada els alumnes disposaven de tot el material, es va recordar el funcionament bàsic del joc, explicant que quan un d'ells hagi tapat tots els nombres d'una fila havien de cridar

[14] Veure annex 4.
[15] Veure annex 5.
[16] Veure annex 6
[17] Veure annex 7.
[18] Veure annex 8.

"línia", i es comprovaria si aquesta és correcta o no, i seguiríem jugant per tal d'aconseguir bingo.

Quan vam començar el joc, anava passant entre els alumnes per comprovar si resolien correctament les operacions, cada vegada que es dictava una operació, es deixava un temps per a què els alumnes poguessin calcular, repetint dues vegades cada operació. Com les operacions no eren triades a l'atzar, sinó que s'escollien de la llista, cada vegada es dictava una operació que pertanyia a un tipus d'estratègia diferent.

Una vegada es va realitzar el bingo i es va comprovar que era correcte, es va agafar el cartró del guanyador i es van treballar les operacions que s'havien de resoldre per completar el cartró. Les operacions es van copiar a la pissarra i en ordre de fila els alumnes havien de sortir a resoldre-les. Quan un dels nens sortia a la pissarra havia d'explicar a la resta com havia resolt l'operació i quina estratègia havia fet servir; aleshores, es demanava als companys si estaven d'acord en el resultat i en l'estratègia que s'havia fet servir o si creien que seria més adient utilitzar una altra. En la segona sessió, es va iniciar una nova partida que va seguir el mateix procediment que en la sessió anterior. Però, en canvi, en aquesta sessió no es van resoldre les operacions a la pissarra ni es van comentar.

La cinquena activitat va consistir en el joc del tres en línia. Aquesta activitat es va realitzar en tres sessions, treballant en cadascuna d'aquesta amb un petit grup heterogeni de vuit alumnes. Per començar a jugar, els nens van seure en parelles un davant de l'altre, se'ls va mostrar un dels taulers i se'ls va demanar si aquest tipus de tauler els hi recordava a algun joc. Una vegada algun dels alumnes l'havien relacionat amb el joc del tres en línia se'ls va explicar quin era el funcionament del joc. Primer vaig mostrar un dels taulers del tres en línia[19] i vaig explicar que en aquest cas dins de cada casella hi trobàvem una operació de suma o resta que ells havien de resoldre per tal de poder col·locar una fitxa en aquella casella. En aquest joc era molt important el treball en parella, ja que si es resolia correctament l'operació l'alumne podia col·locar la seva fitxa en la casella; en canvi, si la resposta era incorrecte, el company li haurà d'avisar i no es podrà col·locar la fitxa. Tot seguit, es va repartir la fitxa de joc[20], i se'ls hi va explicar que havien d'escriure amb qui jugaven i escriure el procediment i l'estratègia que havien fet servir per resoldre l'operació.

[19] Veure annex 9.
[20] Veure annex 10.

Mentre els alumnes jugaven jo estava al seu costat observant-los i ajudant-los si era necessari. Un cop es finalitzava una partida, els alumnes havien de canviar de tauler i de parella. En el algun cas que va faltar algun alumne, jo mateixa vaig jugar amb els nens. Com les sessions van tenir una durada d'una hora, els alumnes van poder jugar amb tres o quatre taulers diferents cadascun.

La sisena i última activitat, va consistir en el joc de l'oca. Aquesta activitat va tenir una durada molt curta, ja que es va realitzar en una única sessió de menys d'una hora. Abans de començar a jugar, es van separar els alumnes creant grups heterogenis de quatre alumnes. Per començar, se'ls va mostrar un tauler de l'oca matemàtica, i se'ls va demanar si reconeixien aquest joc, però ràpidament el van relacionar amb el joc de l'oca.

Un cop els alumnes coneixien quin era el joc al que es jugaria, es va repartir a cada grup un tauler de l'oca[21] sent tots diferents entre ells i un total de sis, i unes instruccions de jocs[22]. Una vegada els alumnes disposaven del material, es van llegir les instruccions del joc, explicant el funcionament de les diferents caselles. Si es queia en una casella resol de color verd s'ha de resoldre l'operació que hi apareix; si es cau en la casella inventa de color vermell havien d'inventar-se una operació que es resolgués mitjançant l'estratègia que s'indicava; i, finalment, les caselles de desplaçament de color lila en que els alumnes havien de moure la fitxa les caselles que s'indiqués. A continuació, es va repartir la fitxa de joc[23] i els hi va explicar com l'havien de completar. Una vegada explicat això, es va acabar de repartir el material que faltava, una fitxa de color i un dau per cada alumne. Una vegada es van resoldre tots els dubtes, es va començar a jugar. Mentre els alumnes jugaven, anava passant entre els diferents grups i comentava diferents aspectes o jugades del joc amb els nens.

[21] Veure annex 11.
[22] Veure annex 12.
[23] Veure annex 13.

3.2. Anàlisi de resultats

A continuació veurem els resultats de les proves que es van realitzar abans i després de la intervenció didàctica que s'ha explicat anteriorment; realitzant una relació entre aquests.

Per exposar aquests resultats, en primer lloc s'ha realitzat un buidatge de les estratègies emprades pels alumnes i s'han recollit en graelles; en la primera columna veurem els noms de les estratègies que hem vist al punt 2.3, depenent si es tracta d'una suma o d'una resta l'operació que s'analitzi. En la segona columna veurem un exemple de resolució d'una operació mitjançant les diferents estratègies. En el cas de la suma trobarem els exemples amb l'operació 34 + 38; i, en el cas de la resta l'operació serà 41 – 26 o 48 – 26. Pel que respecte a la solució de l'operació, si el resultat és correcte la casella serà de color blau, en canvi, si és incorrecte la trobarem de color taronja.

Pel que es refereix als alumnes, en la primera fila podem veure els noms dels nens. Per tal de poder fer una comparació d'aquests, s'han ordenats segons la classificació per nivells que va realitzar la seva tutora[24]. Sent els quatre primers classificats en el grup A (el nivell alt), els quatre segons en el grup B (nivell intermig); i, els tres últims com a grup C (nivell baix). En la graella es podrà observar els tres nivell ja que estaran representats en diferents tonalitats de verd, segon el nivell al que pertanyin, sent el més fosc el nivell més alt, i el més clar el nivell baix.

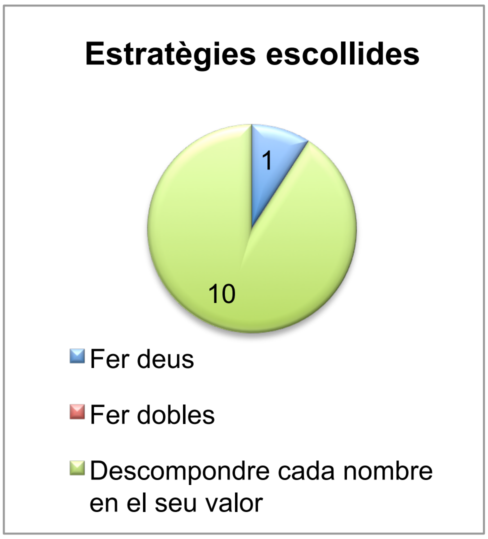
Per tal de poder veure la relació i l'eficàcia de la intervenció, s'analitzaran conjuntament els resultats previs i posteriors de cada operació. En primer lloc, veurem els resultats de les sumes, i tot seguit, les de la resta.

[24] A partir d'aquest punt sempre que es parli del nivell dels alumnes es farà referència a la classificació que va realitzar la mestra.

3.2.1. Sumes

Operació A

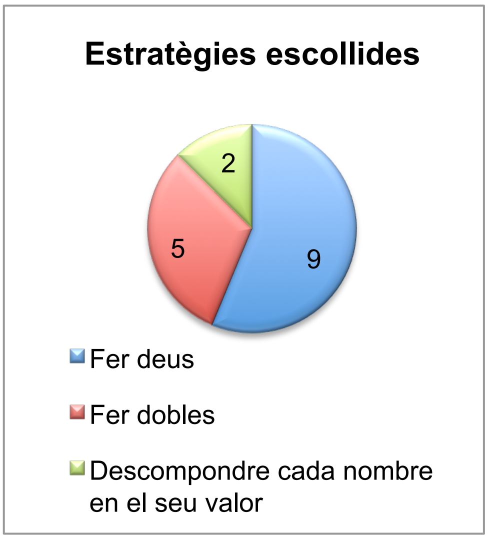
La primera operació que es va demanar resoldre als alumnes va ser la suma 27 + 23, en la graella 1[25] podem veure quines estratègies van fer servir els nens abans de realitzar la intervenció.



Gràfica 1. Resultats primera prova

Observant la gràfica comprovem que tots els nens excepte un, van realitzar l'estratègia de descompondre cada nombre en el seu valor per tal de resoldre l'operació, i quan se'ls demanava si ho sabrien resoldre d'una altra manera, cap d'ells va saber aplicar una estratègia diferent. De tots els resultats obtinguts, únicament un alumne va resoldre incorrectament l'operació, l'Àlex, ja que va realitzar malament una de les operacions de la descomposició.

La segona vegada que s'ha realitzat la prova, la majoria dels alumnes van realitzar estratègies diferents que les que van realitzar inicialment. En la graella 2[26] podem veure com els nens han fet servir diferents estratègies, fins i tot, cinc d'ells han resolt l'operació de dues maneres diferents. Únicament dos alumnes han mantingut la mateixa estratègia que van realitzar en la primera prova.



Gràfica 2. Resultats segona prova

En aquest cas trobem que totes les respostes donades pels alumnes han estat correctes.

Si observem la gràfica, podem veure les estratègies que els alumnes han utilitzat per tal de resoldre l'operació. En aquest cas, els alumnes han trobat més útil resoldre l'operació mitjançant l'estratègia fer deus, o fer dobles,

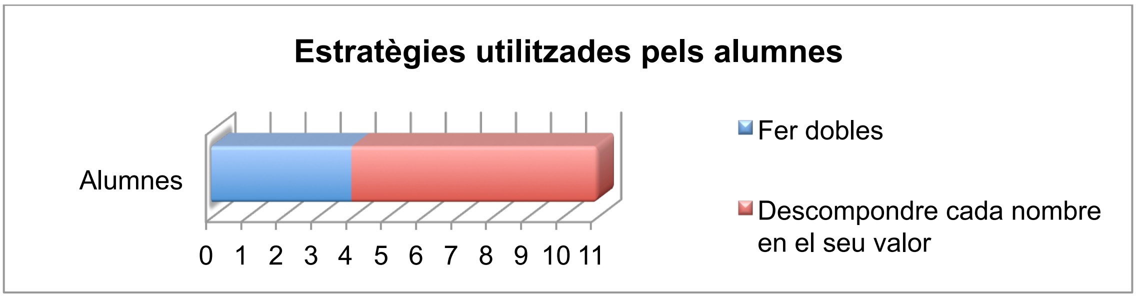
[25] Veure annex 14.
[26] Veure annex 15.

deixant de banda l'estratègia descompondre cada nombre en el seu valor.

Com hem pogut comprovar comparant les dos graelles, després de descobrir noves estratègies i treballar-les mitjançant jocs en la intervenció els alumnes han trobat més útil fer servir estratègies diferents a la que feien servir inicialment.

Operació B

La següent suma que es va proposar als alumnes va ser 152 + 153. En la graella 1[27] podem veure les estratègies que els nens van utilitzar per tal de resoldre l'operació. En aquesta primera prova, tal i com podem veure a la gràfica, la majoria dels alumnes van escollir l'estratègia descompondre cada nombre en el seu valor envers la minoria que va escollir l'estratègia fer dobles, tot i que els que la van escollir no sabien el nom de l'estratègia que estaven utilitzant.



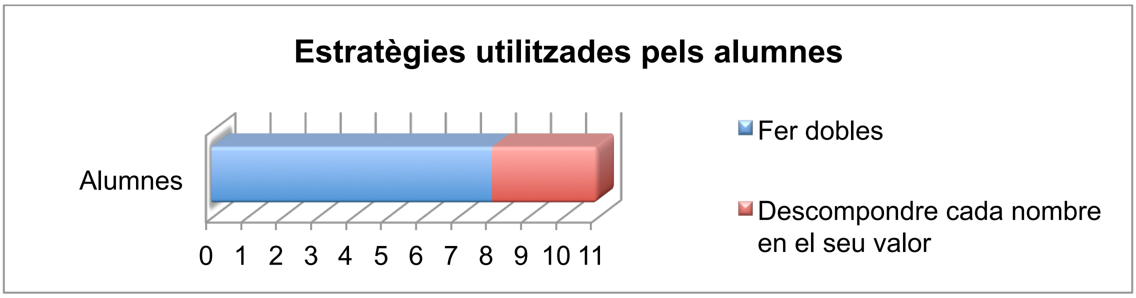
Gràfica 3. Resultats primera prova

El resultat obtingut per part dels alumnes en aquesta primera intervenció va ser correcte en tots els casos.

En la graella 2[28] veiem els resultat obtinguts després de la intervenció, en aquest cas i a l'igual que en la primera prova, podem veure que tots els alumnes han resolt l'operació correctament.

Com podem observar en la gràfica següent, després de la intervenció, la major part dels alumnes van resoldre l'operació mitjançant l'estratègia fer dobles, en comptes de descompondre.

[27] Veure annex 16.
[28] Veure annex 17.



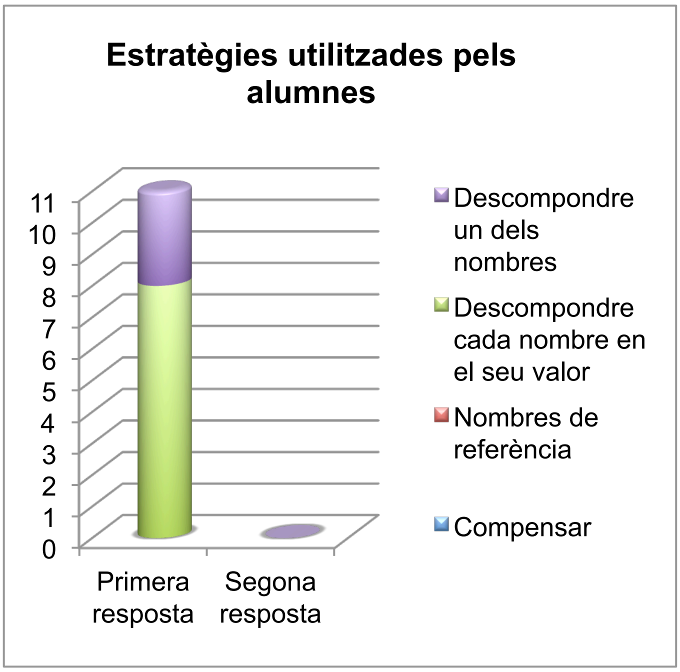
Gràfica 4. Resultats segona prova

Els alumnes que han mantingut l'estratègia descompondre cada nombre en el seu valor, han estat l'Alina, la Maria i l'Ainhoa, les dues primeres pertanyen al grup B i l'última al grup C.

Com hem pogut comprovar comparant les dos graelles, després de descobrir noves estratègies i treballar-les mitjançant jocs en la intervenció els alumnes han trobat més útil fer servir estratègies diferents a la que feien servir inicialment.

Operació C

L'última suma que van resoldre els alumnes va ser l'operació 59 + 36. En els resultat de la primera prova que trobem a la graella 1[29], podem comprovar que els nens resolen l'operació mitjançant estratègies de descomposició.



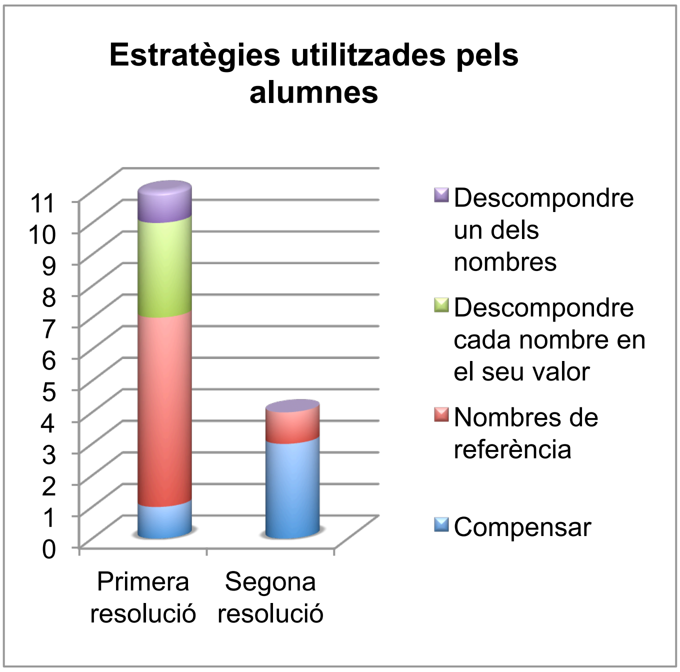
Gràfica 5. Resultats primera prova

Com podem veure a la gràfica, tots els alumnes van resoldre l'operació mitjançant estratègies de descomposició, tres alumnes van resoldre l'operació utilitzant l'estratègia descompondre un dels nombres; la resta, vuit alumnes, van resoldre l'operació a partir de l'estratègia descompondre cada nombre en el seu valor.

[29] Veure annex 18.

Després d'haver resolt l'operació, se'ls va demanar si ho sabrien resoldre mitjançant una estratègia diferent però cap d'ells ho va fer. El resultat de les respostes dels alumnes va ser correcte en tots els casos.

En la segona prova, els nens van resoldre l'operació mitjançant estratègies diferents. A la graella 2[30] podem veure els resultats que es van obtenir.



Gràfica 6. Resultats segona prova

Com podem comprovar, en aquesta segona prova, els alumnes que han fet servir estratègies basades en la descomposició només han estat quatre envers la resta del grup, dels quals sis van fer servir l'estratègia nombres de referència, i només un l'estratègia compensar.

Després d'haver resolt l'operació, es va demanar als alumnes si sabrien resoldre l'operació fent servir una estratègia diferent. Quatre alumnes van ser capaços, fent servir tres d'ells l'estratègia de compensar i un d'ells nombres de referència.

A nivell individual, observant la graella 2 podem comprovar que els alumnes que van resoldre l'operació mitjançant dues estratègies van ser en Guillem, la Duna, l'Ariadna i en Víctor; que pertanyen a tres nivells d'aprenentatge diferents. En Víctor pertany al grup C, però podem veure que primer va resoldre l'operació mitjançant l'estratègia descompondre cada nombre en el seu valor, però que la segona vegada va fer servir l'estratègia nombres de referència que havíem treballat en la intervenció didàctica.

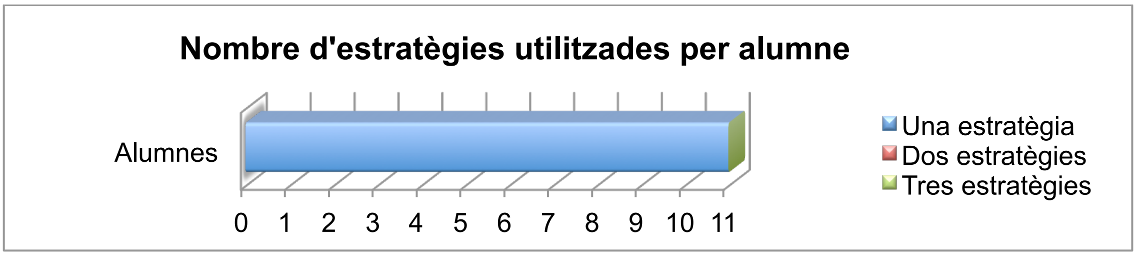
També podem comprovar que l'Arnau, la Maria i l'Ainhoa només van ser capaços de resoldre les operacions mitjançant estratègies de descomposició, i que els tres, pertanyen a nivells d'aprenentatge diferents.

[30] Veure annex 19.

3.2.2. Restes

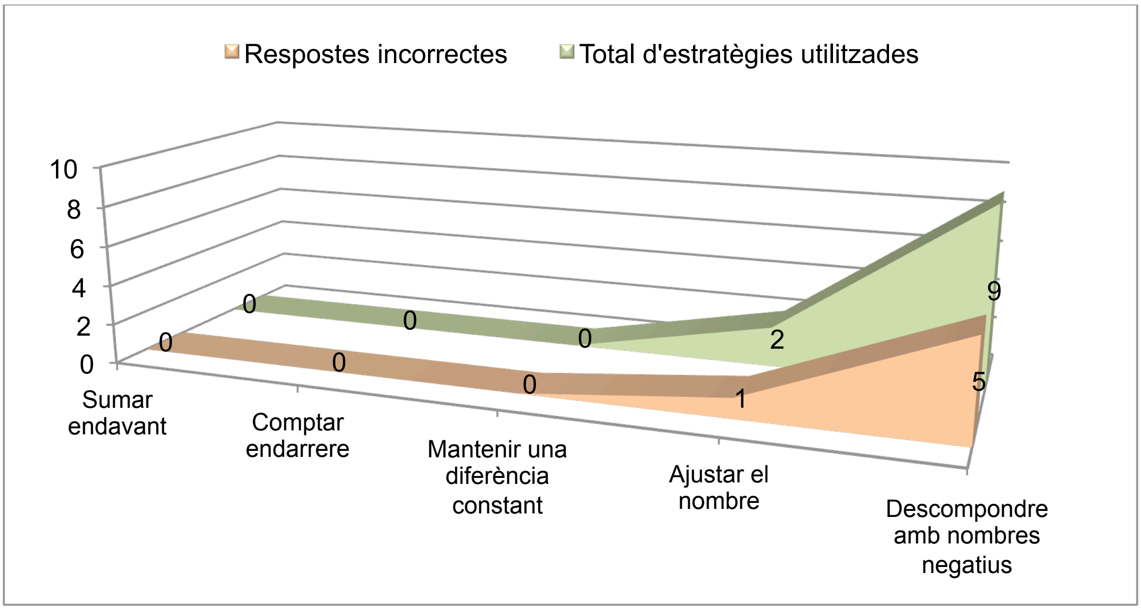
Operació D

La primera resta que es va proposar als alumnes va ser 61 – 38. En la graella 1[31], resultats de la prova que es va realitzar abans de la intervenció, podem veure les estratègies que van fer servir els alumnes per tal de resoldre l'operació. Un cop la van resoldre se'ls va demanar si serien capaços de resoldre-ho fent servir una estratègia diferent, però com podem veure a la gràfica, cap d'ells ho va fer.



Gràfica 7. Resultats primera prova

A la gràfica de sota aquestes línies podem veure les estratègies que van utilitzar els alumnes per resoldre l'operació, nou van escollir l'estratègia *descompondre amb nombres negatius* per tal de resoldre l'operació; d'aquests, cinc van resoldre incorrectament l'operació. Altres dos alumnes van escollir l'estratègia *ajustar el nombre*, i només un d'ells la va resoldre correctament.



Gràfica 8. Resultats segona prova

[31] Veure annex 20.

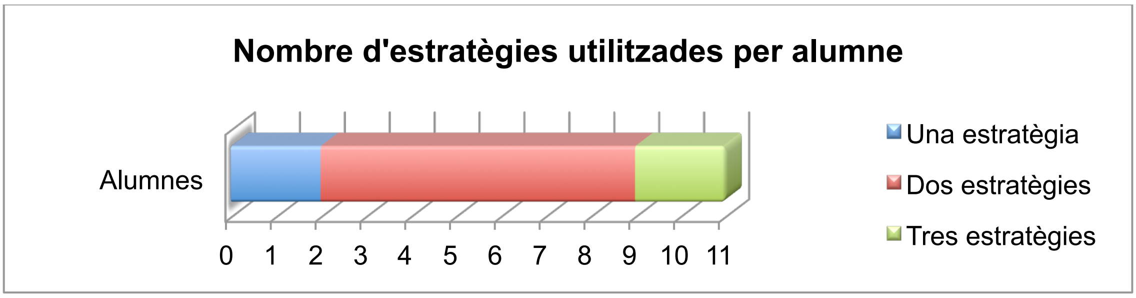
En la gràfica, podem comprovar que les respostes dels alumnes van ser majoritàriament incorrectes, superant el nombre de respostes incorrectes a les correctes.

Si ens fixem en quins han estat els errors que han comès els alumnes, podem veure que l'Arnau, en Pau i l'Ainhoa, que pertanyen a tres grups diferents, s'han equivocat a l'hora de realitzar l'operació en les unitats, fent que el resultat fos positiu en comptes de negatiu, demostrant que encara no han entès quin és el funcionament de l'estratègia amb nombres negatius. Pel que fa a l'Alina, el seu error ha estat de càlcul, ja que el procediment de l'estratègia que ha seguit ha estat correcte. Per acabar, observem que quan en Víctor ha realitzat el càlcul de les unitats, ha realitzat incorrectament la resta, per tant, no té clar el funcionament dels nombres negatius. D'altra banda, en Guillem s'ha equivocat utilitzant l'estratègia d'*ajustar el nombre*, a l'hora de compensar la unitat que ha tret inicialment ja que no té clara aquesta estratègia.

Pel que fa referència als resultats obtinguts una vegada es va realitzar la intervenció didàctica, a la graella 2[32] podem observar que les estratègies escollides pels alumnes van ser variades.

En la següent gràfica observem que hi va haver alumnes que no només van resoldre l'operació fent servir una única estratègia, sinó que hi van haver que la van resoldre fent servir fins a tres estratègies diferents.

Només dos alumnes van resoldre l'operació d'una única manera, set alumnes (més de la meitat del total) la van resoldre fent servir dues estratègies; per acabar, dos alumnes van ser capaços de resoldre l'operació amb tres estratègies diferents.

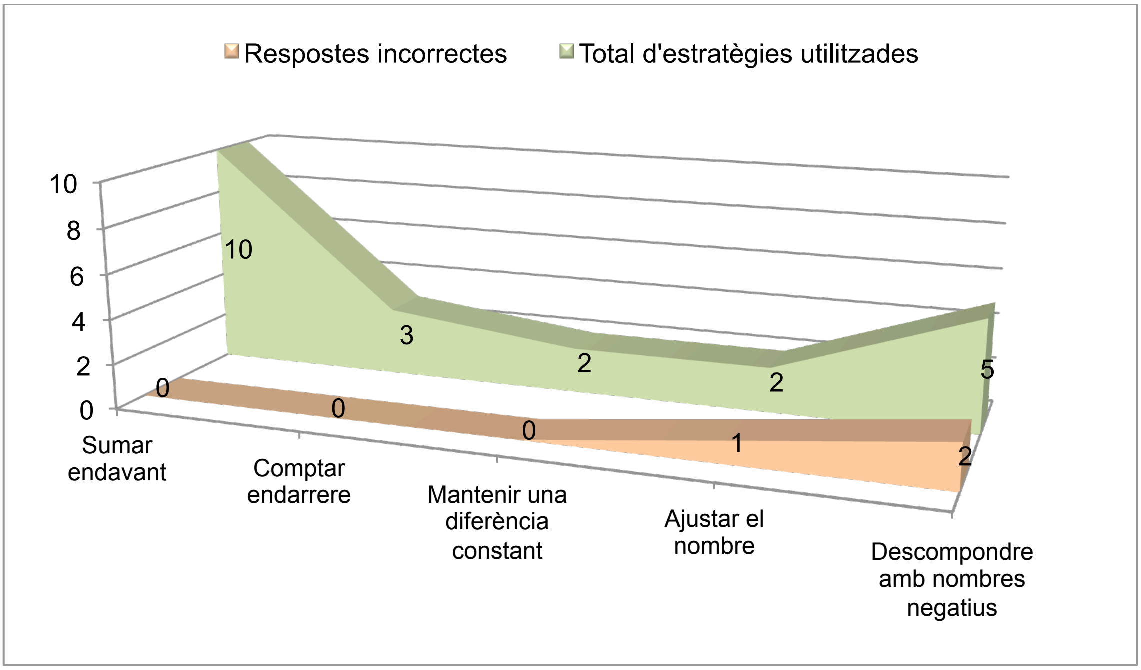


Gràfica 9. Resultats segona prova

Tenint en compte totes les estratègies que els alumnes van realitzar, en total es van realitzar un total de vint-i-dos resolucions diferents. A continuació, veurem una gràfica

[32] Veure annex 21.

amb el nom de les estratègies que van fer servir els alumnes i si les respostes van ser correctes o no.



Gràfica 10. Resultats segona prova

Com podem comprovar els alumnes que van resoldre les operacions mitjançant alguna de les estratègies que vam treballar a través dels jocs, van resoldre les operacions correctament; mentre que els alumnes que van escollir altres estratègies com *descompondre amb nombres negatius*, gairebé la meitat la van resoldre incorrectament. En aquesta estratègia, l'Ainhoa va ser una dels que la va resoldre incorrectament, ja que no entén el funcionament de l'estratègia ja que no realitza l'operació correctament; en canvi, en Víctor va tenir un error de càlcul en el moment de realitzar l'última resta.

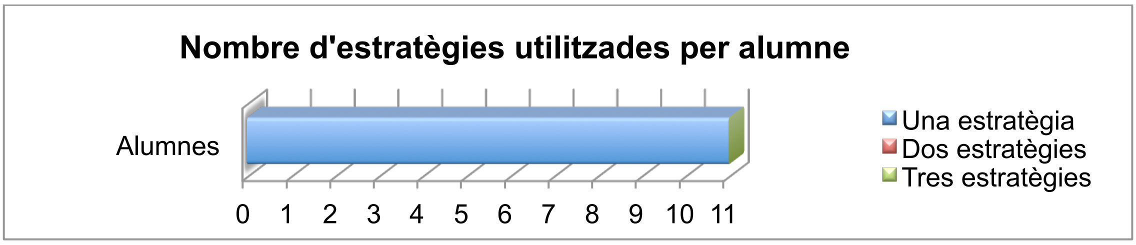
L'error en l'estratègia d'*ajustar el nombre*, la Maria s'ha equivocat en el moment de compensar la quantitat que havia tret inicialment, degut a que no deu tenir clar el funcionament de l'estratègia.

Com hem pogut observar, hi ha una clara millora entre els resultats de la primera prova amb la segona. Primer de tot, remarcar que els alumnes en el segon cas han estat capaços de resoldre l'operació amb fins a tres estratègies diferents, mentre que en la primera prova cap va ser capaç de resoldre-la de dues maneres.

També comprovem que molts dels alumnes que van resoldre incorrectament l'operació la primera vegada, en la segona prova van trobar una estratègia que els era més fàcil per utilitzar, fent que el càlcul fos correcte.

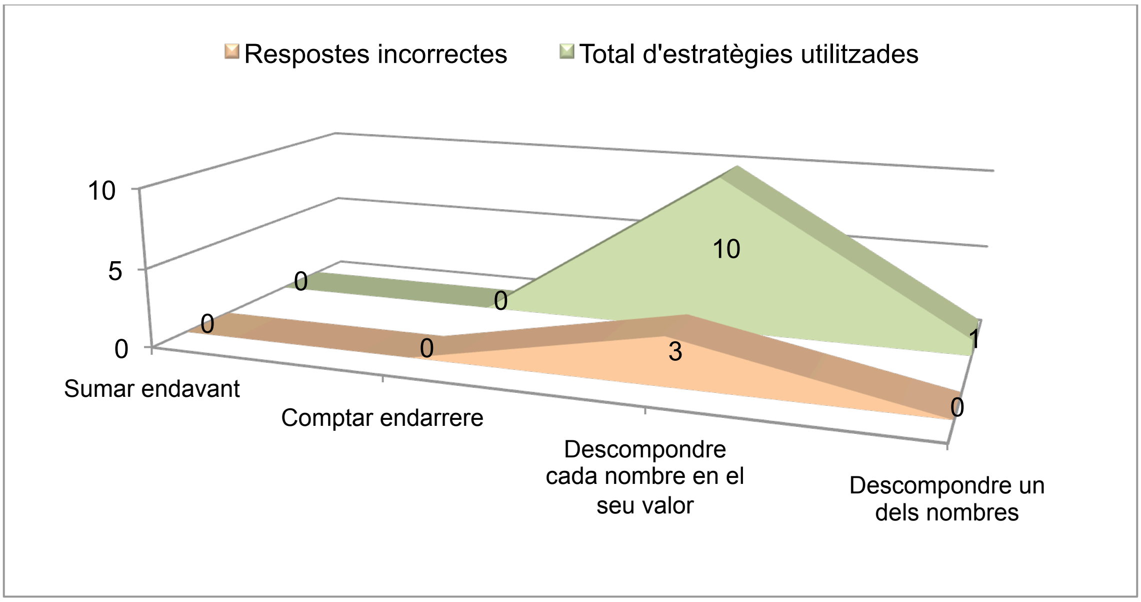
Operació E

La següent resta que es va demanar va ser 175 – 42. En la primera prova, podem veure els resultats a la graella 1[33], els alumnes només van ser capaços de donar una única resposta.



Gràfica 11. Resultats primera prova

Pel que fa al tipus d'estratègies que van utilitzar, podem veure que tots van fer servir estratègies de descomposició. Deu d'ells van resoldre l'operació mitjançant l'estratègia descompondre cada nombre en el seu valor, i un únic alumne va resoldre l'operació mitjançant descompondre un dels nombres.



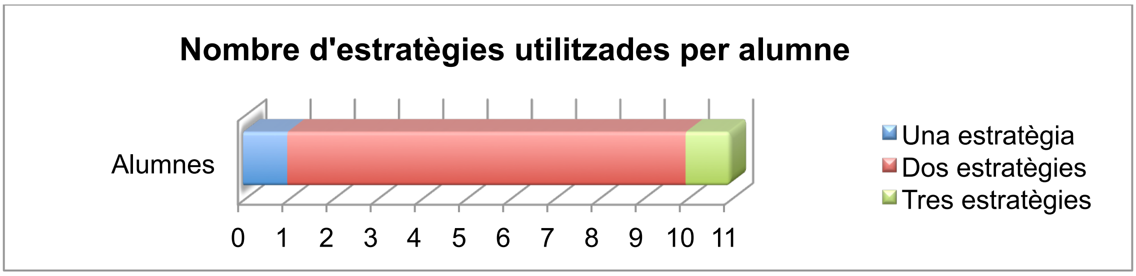
Gràfica 12. Resultats primera prova

Com hem pogut veure a la gràfica, tres alumnes van resoldre incorrectament aquesta operació. Els alumnes que s'han equivocat han estat en Pau, la Maria i l'Àlex, els dos primers pertanyen al grup B, i l'últim al grup C. Trobem que en els tres casos s'ha demostrat que els alumnes no han acabat d'assimilar aquesta estratègia i el seu funcionament; en el primer cas, en Pau s'ha equivocat en l'últim pas de l'operació realitzant una resta en comptes d'una suma. En els dos últims casos, els alumnes han

[33] Veure annex 22.

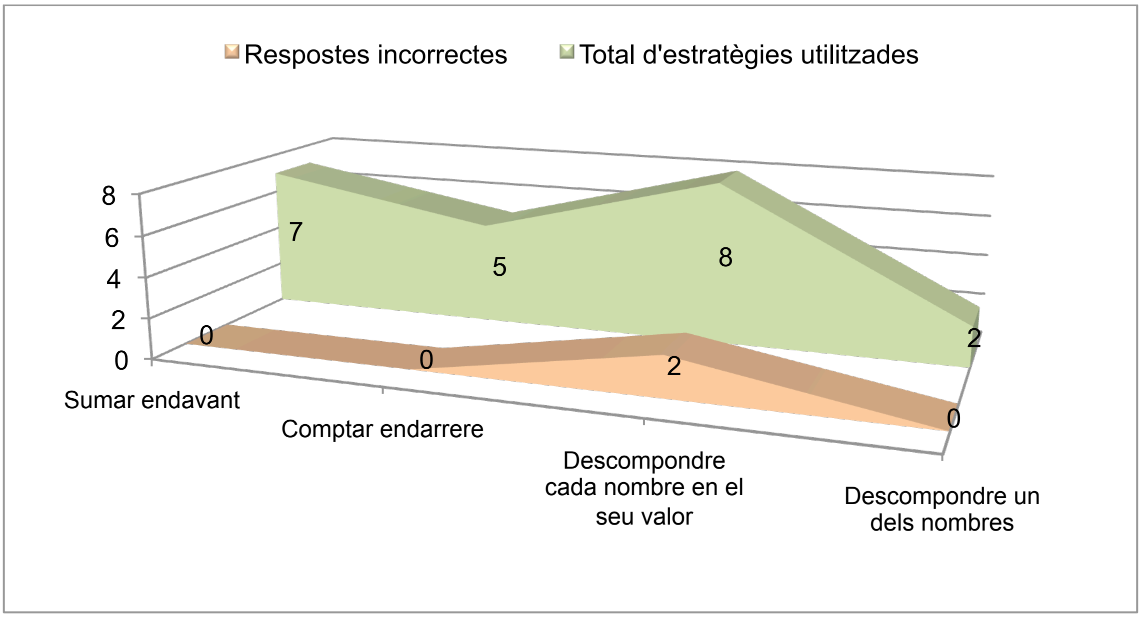
realitzat el mateix error, sent un error de càlcul ja que no han comprès la mecànica i no saben quins valors s'han de restar o sumar.

Pel que fa als resultats obtinguts després de la intervenció, tal com podem veure a la graella 2[34], alguns alumnes van ser capaços de resoldre les estratègies de fins a tres maneres diferents.



Gràfica 13. Resultats segona prova

Tenint en compte que hi van haver alumnes que van resoldre les operacions de més d'una manera, en total es van realitzar vint-i-dos resolucions diferents. Per tant, a la següent gràfica podrem veure quines van ser les estratègies que van fer servir i si van cometre errors.



Gràfica 14. Resultats segona prova

En aquests resultats, podem observar que després de la intervenció encara hi van haver alumnes que van resoldre l'operació mitjançant estratègies de descomposició; tot i que també van saber resoldre les operacions mitjançant altres estratègies com sumar endavant o comptar endarrere. També observem que els dos únics errors que es van cometre en el resultat, van ser en l'estratègia descompondre cada nombre en

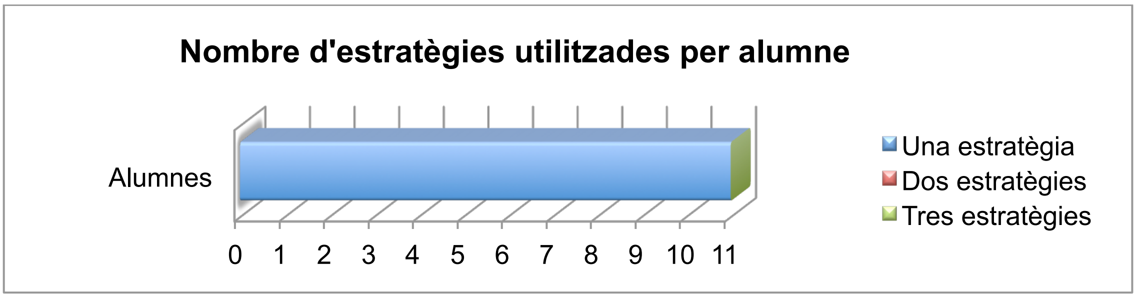
[34] Veure annex 23.

el seu valor, en aquest cas, van resoldre erròniament l'operació en Guillem i la Maria, dels grup A i B, respectivament. En ambdós casos, primer van realitzar l'operació mitjançant la descomposició erròniament, però després van saber resoldre l'operació mitjançant una estratègia diferent i van reconèixer l'error inicial.

Com hem pogut observar comparant les dues graelles, hi ha una millora entre la primera prova i la segona, ja que els alumnes van ser capaços de resoldre l'operació mitjançant més d'una estratègia. També hem comprovat que els alumnes continuen realitzant més errors quan fan servir estratègies de descomposició, però que són capaços de resoldre-ho de maneres diferents i comprovar el resultat.

Operació F

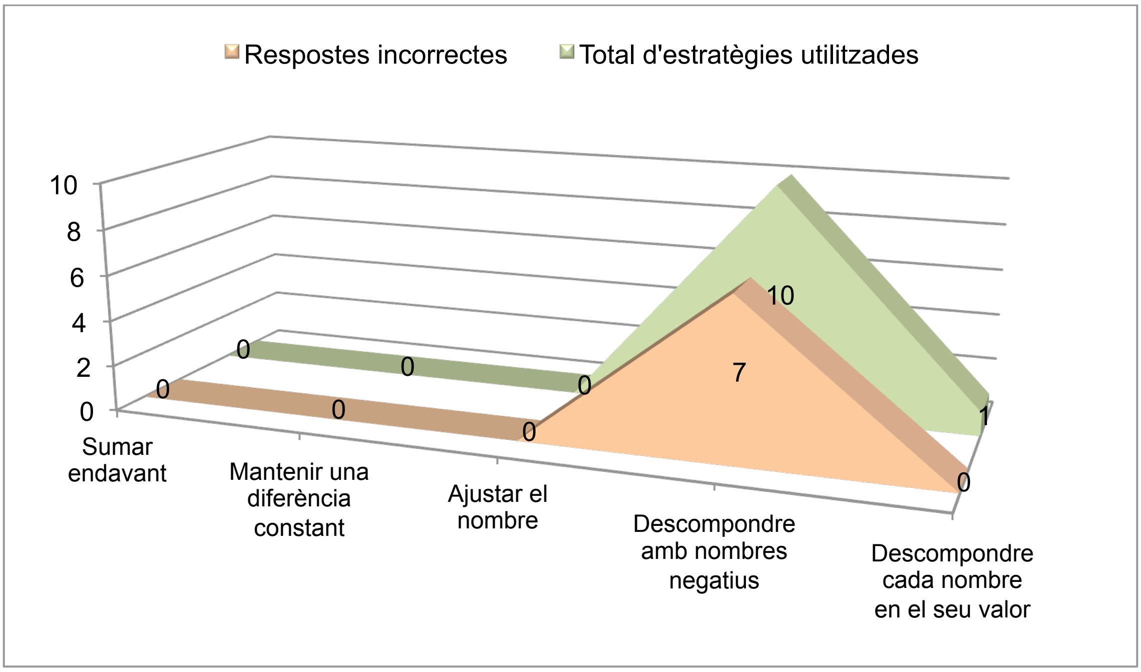
L'última resta que es va proposar als alumnes va ser 123 – 59. En la graella 1[35], resultats de la prova que es va realitzar abans de la intervenció, podem veure les estratègies que els alumnes van utilitzar per resoldre l'operació. Un cop van resoldre l'operació es va demanar als alumnes si sabrien resoldre-ho fent servir una estratègia diferent, però com veurem a la gràfica següent, cap d'ells ho va fer.



Gràfica 15. Resultats primera prova

A la gràfica següent trobarem les estratègies que van fer servir els alumnes per resoldre l'operació, en aquest cas, comprovem que tots els alumnes han realitzat diferents estratègies de descomposició. Un únic alumne ha triat l'estratègia descompondre cada nombre en el seu valor per tal de resoldre l'operació; la resta, deu alumnes, han resolt l'operació mitjançant l'estratègia descomposició amb nombres negatius, resolent-la set d'ells de forma incorrectament.

[35] Veure annex 24.



Gràfica 16. Resultats primera prova

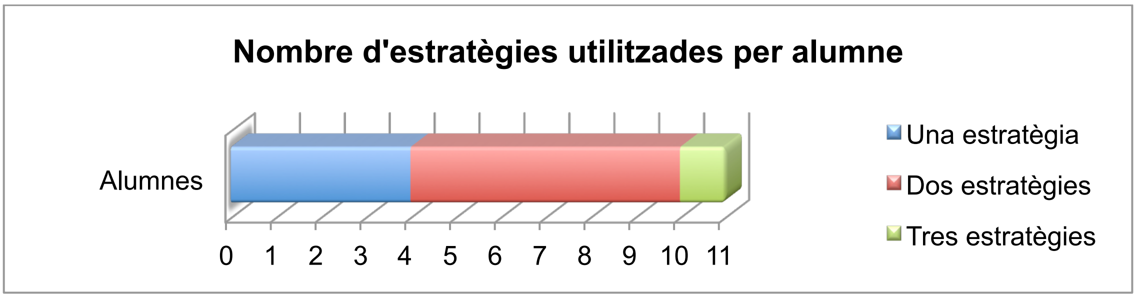
En la gràfica, hem pogut comprovar que les respostes dels alumnes van ser majoritàriament incorrectes, superant el nombre de respostes incorrectes a les correctes.

Si ens fixem en quins han estat els errors que han comès els alumnes, podem veure que tots els errors els han comès alumnes que realitzaven l'estratègia descompondre amb nombres negatius, això ens pot indicar que encara no han entès el funcionament d'aquesta estratègia, ja que els errors han estat no saber quins eren els nombres que havien de ser negatius després de realitzar el càlcul. En referència als nivells, podem comprovar que nens dels tres nivells han comès l'error.

Pel que fa referència als resultats obtinguts una vegada es va realitzar la intervenció didàctica, a la graella 2[36] podem observar que les estratègies escollides pels alumnes van ser diverses.

En la gràfica següent podem veure que hi va haver alumnes que no només van resoldre l'operació fent servir una estratègia, sinó que hi van haver alumnes que van ser capaços de resoldre-la utilitzant, fins i tot, tres estratègies diferents.

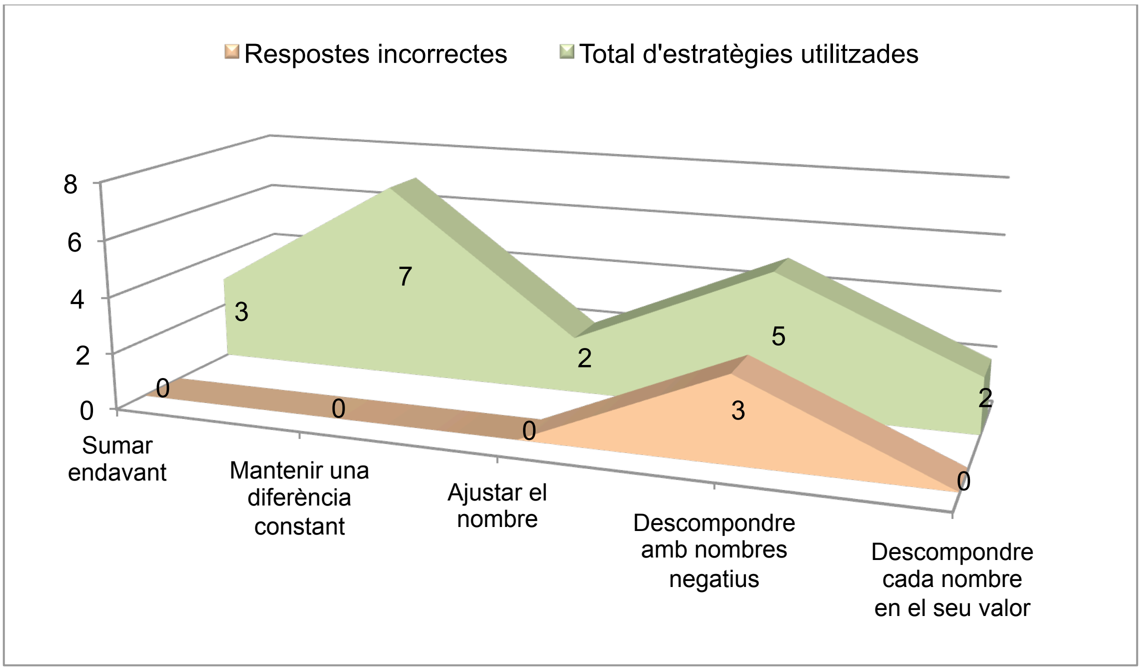
[36] Veure annex 25.



Gràfica 17. Resultats segona prova

Quatre alumnes van resoldre l'operació d'una única manera; sis la van resoldre fent servir dues estratègies; i, per acabar, un alumne va ser capaç de resoldre l'operació amb tres estratègies diferents.

Tenint en comptes totes les resolucions que els alumnes van realitzar, en total es va resoldre l'operació dinou formes diferents. A continuació, veurem una gràfica amb el les estratègies que van utilitzar els alumnes i les respostes errònies que van cometre.



Gràfica 18. Resultats segona prova

Com podem comprovar més de la meitat dels alumnes que van resoldre les operacions mitjançant l'estratègia descompondre amb nombres negatius, van resoldre erròniament l'operació. Mentre que tots els alumnes que la van resoldre mitjançant una estratègia diferent, la van resoldre correctament. Els alumnes que van resoldre incorrectament l'operació van ser en Guillem, la Maria i l'Ainhoa, que pertanyen a grups diferents. En els tres casos, que l'error ha estat que els alumnes no entenen la mecànica d'aquesta estratègia i no saben quins valor han d'escollir per tal de realitzar la resta amb nombres negatius, i tampoc sabem com es realitza, ja que confonen els resultats negatius amb els positius.

En el cas d'en Guillem i la Maria, dels grups A i B respectivament, podem veure a la graella 2 que després de l'error ambdós alumnes van ser capaços de resoldre l'operació correctament mitjançant l'estratègia mantenir una diferència constant. En el cas de l'Ainhoa, que pertany al grup C, després de l'error no va ser capaç de resoldre l'operació mitjançant una estratègia diferent.

En conclusió, remarcar que els alumnes en el segon cas han estat capaços de resoldre l'operació amb fins a tres estratègies diferents, mentre que en la primera prova únicament van ser capaços de resoldre-la mitjançant una única estratègia.

També comprovem que molts dels alumnes que van resoldre incorrectament l'operació la primera vegada, en la segona prova van trobar una estratègia que els era més fàcil per utilitzar, fent que la resposta fos correcte.

4. Conclusions

Amb la realització d'aquest estudi es pretenien complir els següents objectius:

- Identificar i analitzar les estratègies de càlcul mental que fan servir els alumnes de quart de primària
- Realitzar una intervenció didàctica basada en jocs matemàtics per tal d'aprendre diferents estratègies pel càlcul mental
- Comprovar si al final de la seqüència els alumnes han millorat, coneixen i saben aplicar l'estratègia més adient en cada operació

Pel que fa als dos primers objectius, hem comprovat que els alumnes han millorat pel que fa al coneixement d'estratègies per a operacions aritmètiques bàsiques de suma i resta. En els dos casos, podem observar que els alumnes han après noves estratègies i les saben aplicar correctament. Tot i això, podem observar mitjançant les diferents graelles, que la millora és major en el cas de la resta que en el de la suma. Aquest fet es pot comprovar observant les respostes correctes i incorrectes que realitzaven els alumnes abans de la intervenció, i les que realitzaven una vegada havien practicat les noves estratègies. En el cas de la suma, abans de la intervenció ja resolien correctament les operacions, però després d'aquesta, van ser capaços de fer servir estratègies diferents i més útils que les que utilitzaven inicialment.

En canvi, en el cas de la resta, podem observar que quan els alumnes han fet servir estratègies diferents a les que realitzaven inicialment, els resultats d'aquestes eren correctes; en canvi, quan seguien utilitzant les estratègies inicials seguien cometent errors. Això és resultat a que els nens no comprenen les estratègies que feien servir.

Un exemple clar el trobem en les operacions 61 – 38 i 123 – 59, en les quals els alumnes que feien servir a la segona prova la mateixa estratègia que a la primera, el resultat era erroni; però quan se'ls demanava resoldre-ho amb una estratègia diferent, el resultat era correcte.

En relació a l'anàlisi de les estratègies inicials dels alumnes, hem pogut comprovar que els alumnes sempre realitzen estratègies per la descomposició a l'hora de resoldre les operacions de suma o resta. Com a estratègies de descomposició per la suma trobem: descompondre cada nombre en el seu valor i descompondre un dels nombres; per la resta, també trobem les dos anteriors i a més, descompondre amb nombres negatius. El fet que els alumnes es centrin en aquestes estratègies a l'hora de resoldre operacions es degut a que segueixen les exigències de la mestra, ja que des del seu punt de vista, les estratègies més útils i fàcils, tant per la suma com per la resta, són les de descomposició.

Dit això, i com hem pogut comprovar, tot i ser l'estratègia de referència dels alumnes i les que utilitzen sempre, els alumnes encara no han comprès la seva mecànica i no les saben aplicar; ja que quan l'apliquen cometen molts errors tant de procediment com de resultat.

També, hem pogut comprovar que abans de la intervenció els alumnes únicament resolien les operacions d'una única manera, en canvi, després de la intervenció tots sabien resoldre-ho com a mínim mitjançant dues estratègies, i alguns, fins i tot amb tres estratègies diferents. Per tant, hem pogut comprovar que els alumnes han interioritzat les estratègies que han practicat a través dels jocs i són capaços d'aplicar més d'una estratègia per tal de resoldre una operació de suma o resta. Aquest fet és conseqüència, tal com va dir Baroody (1988), que el joc sigui el mitjà natural dels nens, ja que ens ha ajudat a proporcionar una via interessant i significativa per aprendre càlcul mental.

El fet que després de la intervenció els alumnes hagin estat capaços de resoldre les operacions amb més d'una estratègia està relacionat amb el fet que els alumnes en la seva prova hagin comès menys errors. Això es deu a que després d'haver treballat les estratègies, els alumnes es sentien més còmodes amb les noves estratègies que havien descobert ja que molts van deixar d'utilitzar estratègies de descomposició per utilitzar les noves estratègies. Tal com Ortiz (2011) deia, els alumnes no sempre tenen els recursos suficients per crear noves estratègies que els hi fossin útils, per tant, conèixer les estratègies proposades per Parrish (2010) els ha ajudat a tenir més recursos a l'hora d'escollir quina és l'estratègia més apropiada per a cada operació, i per tant, tenir menys marge d'error.

Això també es veu degut amb les noves estratègies els alumnes es trobaven més còmodes i els era més fàcil per ells, ja que fent servir les noves estratègies cap dels alumnes es va equivocar, mentre que utilitzant l'estratègia habitual de descomposició seguien cometent errors.

D'igual manera, hem pogut comprovar que la classificació dels alumnes segons el seu nivell d'aprenentatge que havia realitzat la mestra no era correcta; ja que com hem pogut veure amb els diferents resultats tant els alumnes del nivell alt com alumnes del nivell baix han millorat. Com a principal exemple trobem el cas de l'Àlex i en Víctor, ambdós tenen un nivell baix segons la seva tutora, però com hem pogut comprovar comparant els resultats de la primera prova amb els resultats de la segona, és que no tenien un nivell baix sinó que no comprenien l'estratègia que se'ls feia utilitzar, ja que amb les noves estratègies no van cometre errors i resolien algunes operacions amb fins i tot dos estratègies diferents.

Per tant, hem pogut comprovar que la millora ha estat visible pels tres nivells d'aprenentatge. El fet que els tres nivells hagin millorat d'igual manera deixa clar que la classificació dels alumnes que va realitzar la mestra devia seguir algun altre criteri que no era la comprensió matemàtica. Per tant, comprovem que el que valora i avalua la mestra a l'hora de decidir quins són els alumnes que tenen un nivell més alt no es basa en el seu coneixement o en les seves capacitats, sinó en la seva velocitat de resposta.

També hem vist que els alumnes que pertanyien al tercer nivell, eren més lents a l'hora de resoldre l'operació, però això no vol dir que tinguin un nivell més baix, sinó que necessiten més temps per organitzar els seus pensaments. També hem comprovat que el fet que triguessin més en resoldre l'operació era degut a que no entenien l'estratègia que estaven utilitzant; en la segona prova, el fet de trigar més era degut a que coneixien noves estratègies i tenien més varietat per escollir, i que després van demostrar saber resoldre les operacions amb varies estratègies a l'igual que alumnes d'un nivell més alt que ells.

Fent referència al tercer i últim objectiu: comprovar si al final de la seqüència els alumnes han millorat, coneixen i saben aplicar l'estratègia més adient en cada operació. Podem confirmar que s'ha produït una gran millora dels coneixements dels alumnes respecte els coneixements inicials als finals.

Tal com deia Baroody (1988) s'ha d'explotar l'interès natural del nen en el joc, ja que és el seu espai natural. I tal com explicava i hem comprovat al llarg d'aquest treball, els jocs proporcionen una via significativa per aprendre matemàtiques, ja que brinden una oportunitat natural i agradable d'establir connexions i dominar les tècniques bàsiques, afavorint l'aprenentatge significatiu.

D'igual manera, Ortiz (2011) afirmava que els jocs potencien les habilitats de càlcul, milloren l'actitud cap a les matemàtiques i creen discussió i intercanvi d'opinions entre els companys. El fet de treballar a partir de jocs també és important per tal de crear una bona experiència d'aprenentatge, generant creences, emocions i actituds positives envers les matemàtiques. I aquests fets són els que s'han aconseguit mitjançant els jocs que s'han realitzat a l'aula, i que han ajudat a millorar el càlcul mental dels alumnes.

En aquest estudi els resultats de tots els alumnes han millorat gràcies a la intervenció en que es van descobrir i treballar les estratègies de suma i resta. Gràcies a això, podem afirmar que altre treball en les matemàtiques es possible, diferent al que es realitza en moltes escoles en les que es treballa, tal com va dir Ortiz[37] (1999-2000) en que els mestres es centraven en treballar els continguts del llibre de text. Amb aquest treball s'ha demostrat que tal com defensaven alguns autors com Baroody o Ortiz, els jocs matemàtics tenen un lloc dins l'àrea de matemàtiques.

Per acabar, des del meu parer aquest treball ha estat molt útil, tant per mi com per l'escola on vaig realitzar la intervenció, ja que els nens i jo hem pogut treballar diferents estratègies mentre es jugava i hem pogut comprovar amb els anàlisi que era útil i que funcionava. Per l'escola també ha estat important, ja que han pogut veure una metodologia diferent a la que ells feien servir que podran aplicar en el futur.

[37] Projecte d'investigació i curs de càlcul mental. Dirigit a professorat de primària i secundaria. CPR de Valladolid (1999-2000).

També, aquest treball m'ha servit per comprovar que una altra manera d'ensenyar i d'aprendre és possible. Que els mestres no hem d'aplicar metodologies com la de la teoria de l'absorció, sinó que mitjançant activitats lúdiques i jocs els alumnes poden aconseguir un aprenentatge més significatiu. Per tant, penso que aquest treball em resultarà una base molt útil en el futur quan sigui mestra, ja que, després de tot el treball he pogut comprovar que els jocs en l'àrea de matemàtiques són molt positius.

5. Bibliografia

Baroody, Arthur J. (1988). *El Pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.* Madrid: Centro de Publicaciones del M.E.C.

Chamorro, M. del Carmen (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria.* Madrid: Prentice Hall.

Gómez, Bernardo (2005). *La enseñanza del cálculo mental.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 4, 17-19.

Kamii, Constance (1993). *El niño reinventa la aritmética: implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

Martínez Montero, Jaime (2008). *Competencias básicas en matemáticas: una nueva práctica.* Editorial Wolters Kluwer Educacion.

M.E.C. (2007) *Ordenación de la Educación Primaria. Matemáticas.* Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ortiz Vallejo, María (2011). *Cálculo mental en el aula*. Madrid: Editorial CCS

— (2012). *Cálculo mental en el aula en el segundo ciclo de educación primaria.* Madrid: Editorial CCS.

Parrish, Sherry (2010). *Number talks: helping children build mental math and computation strategies, grades K-5.* Sausalito, CA: Math Solutions.

Valencia Cifuentes, E. (2013). Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas.* Noviembre de 2013, vol. 84, p. 5-23.